超対称性と超重力

Supersymmetry and Supergravity,

Second edition, revised and expanded

J.ヴェス／J.バガー 著

Julius Wess / Jonathan Bagger

志摩一成 訳

Kazunari Shima

丸善出版

Supersymmetry and Supergravity

Second Edition, Revised and Expanded

by

Julius Wess and Jonathan Bagger

Japanese translation published by arrangement with Princeton University Press through The English Agency (Japan) Ltd.

トラウディに捧げる

目　　次

第2版の序文

本書の元になった講義以降，超対称素粒子現象論が精力的研究の主題になっている．多くの模型が提唱され，中には超重力多重項が本質的な役割を果たしているものもある．多種多様な実験的探索が行われたが，今後も多くの探索が計画されている．

このような状況から，この第2版は初版を大きく越えるものにすべきと考えた．第2版は六つの新しい章と五つの新しい付録を新たに追加している．新しい章は主に超重力に結合する最も一般的な超対称ゲージ理論の成分場の形を導くことを主にしている．結果のラグランジアンは，第25章と付録Gに示されているが，超重力理論のすべての現象論的研究の出発点になる．模型研究者はそのラグランジアンを用いればよく，残りの部分は読む必要がないともいえる．

新たな付録は，ケーラー幾何，等長変換，対称性の非線形表現の入門を含んでいる．それらの項目は本文中の式の導出の理解には本質的であるし，一般的興味をひくものでもある．その結果は，カイラル力学の精神の中において，超対称現象論への模型によらない手続きを容易にするものである．

追加項目は本書の視野を広げたので，現象論だけでなく形式論に関心のある物理学者にも魅力のあるものであろう．現在の形で，本書は超対称性理論の現象論的研究の理論的基礎を与えるものである．

第2版の準備期間中のDFGのゴッドフリード・ウィルヘルム・ライプニッツ・プログラムとアルフレッド・スローン財団の支援に感謝する．

1991年2月

ユリウス・ヴェス（ミュンヘン大学）
ジョナサン・バガー（ジョンズ・ホプキンス大学）

初 版 の 序 文

プリンストン大学での超対称性と超重力理論の講義に対して多くの高い関心が寄せられたことに勇気付けられて，より多くの読者が講義内容を入手できるよう本書の執筆を試みた．講義は主題についての系統的な報告ではない．その代わりに，超対称性と超重力を理解し展開するわれわれの試みにおいて，ブルーノ・ズミノと私自身がとった手法への入門である．

本書は，二つの部分から成っている．第1部は超対称ゲージ理論を構築するのに必要な形式を展開する．第2部はこの形式を局所超対称変換へと拡張する．

各章末には，私が読者に薦める論文を2本載せてある．私の選択が，主題に貢献した多くの著者に公平でないことは承知している．より完全な参考文献の一覧は，P. Feyet, S. Ferrara, "*Supersymmetry*," Physics Report **32C**, No.5 (1977) と P. Van Nieuwenhuizen, "*Supergravity*," Physics Report **68C**, No.4 (1981) にある．

全体を通じて，重要な式は太文字で番号付けされている．これらの式は各章末に集められている．演習問題も各章末にあり，より深い理解に資するものになっている．

本書は，ジョナサン・バガーとの共同作業でつくられたもので，彼の存在なしでは日の目をみなかった．ジョンと私は，原稿作成に関してのウィニー・ワーイングの献身的な助力に感謝している．彼女のレベルの高い仕事のお陰で，符号や因子の誤りの除去に最善を尽くすことができた．また，多くの人々が誤りを正すのを助けてくれた．特にマーティン・ミュラーの本の後半への助力に感謝したい．

私は，私が高等研究所にアルバート・アインシュタイン客員教授として滞在できたことに対するドイツ連邦共和国の支援に，ジョンは米国国立科学財団からのプリンストン大学への院生奨学金に感謝したい．

終わりに，私は，デビッド・グロスとプリンストン大学物理学教室の，同様に，シュテファン・アドラーと高等研究所のメンバーのこの講義への批判的かつ大変勇気付けられる彼らの興味に対して感謝するものである．

1982 年 5 月

ユリウス・ヴェス（カールスルーエ大学）

訳者序文

本書は，超対称性の発見者の一人であるユリウス・エリック・ヴェス（Julius Eric Wess）教授が，アルバート・アインシュタイン客員教授としてプリンストン高等研究所に滞在中に行った「超対称性と超重力」に関する講義を，プリンストン大学院生のジョナサン・バガー（Jonathan Bagger）がとった講義ノートをもとにしてヴェス教授自身が書き下ろした “Supersymmetry and Supergravity, Second Edition”（Princeton University Press，1992 年）の翻訳である．第 1 版は 1982 年に出版されている．

「“自然” の存在の理法」を探究する素粒子物理学は，“局所場の理論” と “ゲージ対称性” に基づく素粒子の「標準模型」により電磁気力，弱い力，強い力の三つの力を担うゲージ粒子（ボース粒子）群とクォーク，電子，等の物質粒子（フェルミ粒子）群の低エネルギーの相互作用の統一的記述に成功した．しかし，標準模型の基礎方程式には，理論自身からは決まらない定数が（多く）含まれること，物質粒子群にみられる 3 世代構造の理解には無力であること，等の未解決の根本的な問題がある．また，唯一残された四つ目の力で，アインシュタインの一般相対性原理によって時空の幾何学的量で記述される重力と標準模型とを包含する真の統一理論の構築のためには，重力（時空の湾曲を担うボース粒子）と物質（フェルミ粒子）を同等に扱うゲージ対称性が必要である．

局所場の理論における「超対称性（supersymmetry）」は，当時はカールスルーエ大学教授であったヴェス（マックスプランク研究所長・ミュンヘン大学教授）と欧州原子核研究所（CERN）教授であったブルーノ・ズミノ（Bruno Zumino）（カリフォルニア大学バークレー校教授）の共同研究によって発見され定式化された（1973 年の第 1 論文では，超ゲージ変換（supergauge transformation）と書かれている）．超対称性は，すべての素粒子には，それと “対” を成すスピンだけが 1/2 異なる粒子が存在し，（時空の各点で）一方の素粒子をボース粒子と決めようがフェルミ粒子と決めようが理論は不変であること，を要求する．これは美しい強力な対称性であるが，すでに発見されている素粒子群にはその兆候さえない超非現実な対称性のた

めに，（特に日本では）数学的興味の対象に留まった．しかし，欧州を中心に研究が進められた．その結果，超対称性が，時空の対称性（ポアンカレ群，GL(4, R) 等）と密接に関係していること，S 行列と矛盾せずにフェルミ粒子とボース粒子を一括して同等に扱うことができる新しい型の（最後の）ゲージ対称性であるかもしれないこと，等の本質的に重要な特徴が明らかにされた．超対称性の与える理論の枠組みは前述の素粒子物理の未解決の諸問題を一気に解決する潜在力をもつことが広く認識され，物理的意味の研究，数学的意味・定式化の研究が大きく進展し世界的潮流となった．重力理論を局所的超対称変換のもとで不変に拡張した「超重力理論」，標準模型を含む素粒子の統一模型を大域的超対称変換のもとで不変に拡張した「超対称模型」が構築され，それらの場の理論的性質の解析，現象論への応用が広範に行われており，今や，超対称性は「標準模型」を越えて真の統一理論を構築するのに必要不可欠な概念と思われている．が，しかし，いまだ万人を納得させることに成功した超対称性理論はつくられていない．

このような状況の中，超対称性の発見から，超空間と超場による超対称性理論の定式化，ケーラー時空での超重力理論の幾何学的構成，等とつねに研究をリードし新しい局面を切り開いてきた著者のヴェス教授は，2007 年 8 月 8 日，心臓発作により 72 歳で急逝された．折しも，超対称性誕生の地であるカールスルーエ大学で盛大に行われた国際会議「supersymmetry 2007」で基調講演をされ自宅（ハンブルグ）に戻られてから一週間後のことである．哀悼の念とともに，痛惜の念が絶えない．ニューヨークタイムズにも長い追悼記事が載った．ヴェス教授は，ご夫妻で日本にも 3 回来られ日本物理学会での講演のほか，多くの大学でセミナーをされた．修善寺が眼下にみえる露天風呂に浸かりながら四方山話をした中で，「超場のアイデアは，CERN で夏季休暇中，テニスの後ビールを飲んで午睡中にひらめいたこと，超対称性がこんなに広く受け入れられるとは予想しなかったこと，超空間は数学的な道具で超対称性の物理的な意味はいまだ不明なこと，心臓の調子が悪く一年前にドイツでも希少な最新型の心臓補助器具に換えたこと，日本とヨーロッパの美意識の特質」等，穏やかに話されたことが懐かしく思い出される．ズミノ教授，ヴェス教授，訳者は同じ干支（猪）で（訳者とズミノ教授は誕生日も同じ），干支の意味を説明したら，大変気に入って，手紙には，「“I like this cycle.”」と書かれていた．

訳者にとって恩師・先輩・友人である著者ヴェス教授の追悼も兼ねて，本書の翻訳に至った経緯，翻訳の意図と方針を述べてみたい．訳者が原著を知ったのは，1981

年から 2 年間，アレキサンダー・フォン・フンボルト財団（AvH）の招聘研究員としてヴェス教授の研究室に滞在したときである．院生を含む参加者全員が，原著の初版の念稿のコピーを各自が詳細にチェックし意気軒昂に熱く輪講していた．新しい理論の誕生の場に居合わせる熱気に満ちていた．ユーラシア大陸の東端の超対称性が不毛（当時）の島国で書いた超対称性の非線形表現に関する論文（1976 年）に関心を示し，ヴェス教授が訳者を招いてくれたのであるが，それは，彼が非線形表現の研究を始めていたからであることが後で判明した．ある日，彼が「Hast Du die Zeit?(時間ある？)」と言って部屋に入ってきたので，そのときは以前からの面倒な計算をしている最中だった訳者は「Nein! (無いよ！)」と言ってしまった．その数日後から，ヴェス教授はコロンビア大学から来ていた研究者と非線形表現の共同研究を始めたのである．あの問いかけは，共同研究の誘いだったのかとわかったが，後の祭りである．それ以降，共同研究の機会はなかったが，ヴェス教授からは亡くなる直前まで家族ぐるみの以前と変わらない温かい支援と激励をいただき，訳者にとって研究のよき理解者，恩師，先達であった．国際会議「supersymmetry 2007」会場から，ハンブルクに帰る前日に，「君の最近の一連の仕事（非線形超対称一般相対性理論）を読みたいから，明日の朝，出発前に会議事務局の前までもって来てくれ」と突然言うので，半信半疑であったが，翌朝，「つまらなくてゴミ箱に捨てられなければいいんだけど」と言って手渡したら，「面白そうだから道中楽しみに‥」と冗談半分に交わした会話が，最後になってしまった．ヴェス教授が読んだ最後の論文は訳者の論文であったかもしれない．不思議な因縁を感じ，共同研究がなかったことが悔やまれた．DFG と AvH の客員教授としてのカールスルーエの二度目の滞在（1989～1990 年）は，原著の初版が何カ国語かにすでに翻訳されていた時期で，ヴェス教授が日本語への翻訳に言及したのを昨年になって思い出したことと，原著第 2 版の日本語訳を期待する研究者が少なくないことが，この翻訳の企画の端緒となった．

原著はご覧の通り複雑な式が大半であるため翻訳は非常に神経質な作業が予想されるので，共著者で旧知のジョン（ジョンズ・ホプキンス大学）に，数式の元ファイルの有無を尋ねたところ，「タイプライターで作成されたので元版がないこと，ロシア語版は写真印刷併用にしたこと，等」が判明し逡巡したが，丸善出版株式会社の支援により TEX で組版されることになった．

文章の訳出にあたっては，ジョンから，「最初の手稿には文章が沢山あったが，ヴェス教授が重要な部分だけを残し不要な部分はドンドン削ってから推敲した」と聞い

ていたので，単語，文構造，等に込めた原著者の意図，論理性・思考過程を忠実に反映するために直訳を原則とし，訳者の理解を反映しやすい意訳は可能なかぎり避けた．また，今夏，ご遺族から譲っていただいた遺稿の中に発見した手書きの数式の加筆訂正と誤植の訂正を本書に採用した．各章末には，式番号と対応する重要な式がリストアップされているが，欠けている（省かれた？）式は補っておいた．読者の利便性を考えて，簡単な索引をつけた．

本書の内容は，第 1～20 章は基本的に第 1 版の内容であるが第 21～26 章は，第 2 版で新たに加えられた．付録は，付録 C～付録 G が第 2 版で新たに書き加えられた．付録 E，付録 F は，超対称性の自発的破れの機構と物理的意味がいまだ同定されていないので，非常に重要な部分で本文に加えてもよいほどである．フェルミ粒子とボース粒子の "区別" が，量子力学（$h \neq 0$）と不可分であることを考えると，時空の対称性に関係する超対称性は，プランク・スケールの物理に関係して破れる可能性があり，本付録は重要な示唆を与える．超対称性の検証も視野に入れて建設された LHC（CERN）から今夏発表された最初の実験データは，既存の超対称模型における低エネルギー（数 TeV 領域）での超対称性の破れを否定している．

超対称性の発見，数学的構造（グラスマン変数と graded リー代数）の解明，場の理論の構築と応用，超重力理論の構築と応用，と続く章立てとその内容は，超対称性の開拓者ならではの苦心の道筋（論理展開）とその結果が，応用しやすい形で要領よく研究の臨場感をもって書かれていて迫力があり，ヨーロッパの伝統的な物理学研究の神髄を具現している．数式の検討は別にして，通読するだけでも，発見者・開拓者の書き下ろした本だけがもつ思考の過程と研究の醍醐味を味わうことができる．本書の出版が，物理的にも数学的にも深遠で難解な概念である超対称性の理解に寄与し，若い研究者には一つの研究スタイルを提示できたとすれば，望外の喜びである．

本書の翻訳は，丸善出版株式会社の支援と，佐久間弘子氏の企画全般にわたる細やかで確実な配慮，沼澤修平氏の校正全般にわたる正確で寛容な支援なしには実現しなかった．心より厚くお礼申し上げる．

2011 年 9 月

志摩一成

1.　なぜ，超対称性か？

超対称性は物理学者，数学者の間でかなり興味をもたれている主題である．超対称性それ自体のみならず，それが素粒子物理学で基本的な役割を果たす可能性があるという点で魅力的である．この確信は，ハーグ（Haag），ソーニウス（Sohnius），ロプシャンスキー（Lopuszanski）の重要な仕事に依拠している．彼らは，超対称代数が相対論的場の量子論に矛盾しない S–行列の対称性の中で唯一の graded リー代数であることを証明した．本章では，それらの定理と証明を議論する（超対称性理論に特に関心のある読者は直接第 2 章，第 3 章から出発して構わない）．

始める前に，まず，超対称代数を示す：

$$
\begin{aligned}
\{Q_\alpha{}^A, \overline{Q}_{\dot\beta, B}\}_+ &= 2\sigma_{\alpha\dot\beta}{}^m P_m \delta^A{}_B \\
\{Q_\alpha{}^A, Q_\beta{}^B\}_+ &= \{\overline{Q}_{\dot\alpha A}, \overline{Q}_{\dot\beta B}\}_+ = 0 \\
[P_m, Q_\alpha{}^A]_- &= [P_m, \overline{Q}_{\dot\alpha A}]_- = 0 \\
[P_m, P_n]_- &= 0.
\end{aligned}
\qquad \textbf{(I)}
$$

ギリシャ文字の添字（α，β，・・，$\dot\alpha$，$\dot\beta$，・・）は 1〜2 で，2 成分ワイル・スピノルを表す．ラテン添字（m，n，$\cdots$）は，1〜4 を走り，ローレンツ 4 元ベクトルを示す．大文字の添字（A，B，$\cdots$）は内部空間に関するもので，それらは 1 からある整数 $N \geqq 1$ をとる．$N = 1$ の代数は超対称代数，$N > 1$ は拡張された超対称代数とよばれる．本書で使用される記号，略記等は付録 A にまとめてある．

これで，定理について考える準備ができた．すべての graded リー代数の中で，超対称代数（セントラルチャージ（中心電荷）を含むように拡張したものを含み，これについては本章の最後に述べる）だけが相対論的場の量子論と矛盾しない S–行列の対称性を生成する．この証明は，S–行列の可能な対称性に関する行き止まり定理（no-go theorem）のなかで最も正確で強力なコールマン–マンデュラ（Coleman–Mandula）定理に基づ

いている．

コールマン–マンデュラ定理は次の仮定から出発する：

(1)　S–行列は 4 次元時空の相対論的な局所場の理論に基づいている．

(2)　質量の決まった一粒子状態を付随する有限個の異なる粒子だけから成る．

(3)　真空と一粒子状態の間にエネルギーギャップが存在する．

定理から，S–行列の対称性の最も一般的なリー代数はエネルギー・運動量演算子 P_m，ローレンツ回転生成子 M_{mn}，そして，有限個のローレンツ・スカラー演算子 B_ℓ から成る．定理はさらに B_ℓ は有限なリー群のリー代数に属さなければならないことを示している．

超対称性は一つの条件を緩めることにより，コールマン–マンデュラ定理の制限を回避している．彼らは代数系が交換子のほかに反交換子をも含むように，リー代数の概念を一般化する．この新しい代数は超代数 (superalgebra)，あるいは，graded リー代数とよばれる．形式的に次のように表される：

$$\{Q, Q'\}_+ = X, \qquad [X, X']_- = X'', \qquad [Q, X]_- = Q''. \tag{1.2}$$

ここで，Q，Q' と Q'' は代数の奇（反交換）部分を，X，X' と X'' は偶（交換）部分を表す．

演算子 X はコールマン–マンデュラ定理で決められる．それらは，ポアンカレ代数の元 $\mathscr{P} = \{P_m, M_{mn}\}$ またはローレンツ不変なコンパクト・リー代数 $\mathscr{A}$ の元である．代数 $\mathscr{A}$ は半単純代数 $\mathscr{A}_1$ とアーベリアン代数 $\mathscr{A}_2$ の直和 $\mathscr{A} = \mathscr{A}_1 \oplus \mathscr{A}_2$ である．

演算子 Q は次のように，斉次ローレンツ群 $\mathscr{L}$ のもとで既約な表現の和に分解される．

$$Q = \sum Q_{\underline{\alpha_1\cdots\alpha_a},\underline{\dot\alpha_1\cdots\dot\alpha_b}}. \tag{1.3}$$

$Q_{\underline{\alpha_1\cdots\alpha_a},\underline{\dot\alpha_1\cdots\dot\alpha_b}}$ は下線の付いた添字 $\alpha_1\cdots\alpha_a$ と $\dot\alpha_1\cdots\dot\alpha_b$ に関して対称である．それらは $\mathscr{L}$ のスピン–$(a+b)/2$ 既約表現に属している．Q は反交換なので，スピンと統計の関係より $a+b$ は奇数でなければならない．

ここで，$a+b=1$ を示すのにさらに二つの仮定をおく．それは，

(1)　Q は正定値メトリックのヒルベルト空間に作用すること，

(2)　Q とそのエルミート共役 $\overline{Q}$ の両方がその代数に属すること，

である．われわれは次の反交換関係から出発する．

$$\left\{Q_{\underline{\alpha_1\cdots\alpha_a},\underline{\dot\alpha_1\cdots\dot\alpha_b}}, \overline{Q}_{\underline{\dot\beta_1\cdots\dot\beta_a},\underline{\beta_1\cdots\beta_b}}\right\}. \tag{1.4}$$

ここで，すべての添字を 1 とする．積

$$Q_{\underbrace{1\cdots1}_{a},\underbrace{\dot{1}\cdots\dot{1}}_{b}}\overline{Q}_{\underbrace{\dot{1}\cdots\dot{1}}_{a},\underbrace{1\cdots1}_{b}} \tag{1.5}$$

は，$\mathscr{L}$ のスピン–$(a+b)$ 表現であり，したがって

$$\left\{Q_{\underbrace{1\cdots1}_{a},\underbrace{\dot{1}\cdots\dot{1}}_{b}},\overline{Q}_{\underbrace{\dot{1}\cdots\dot{1}}_{a},\underbrace{1\cdots1}_{b}}\right\} \tag{1.6}$$

はスピン–$(a+b)$ をもつ代数の偶元に閉じなければならない．コールマン–マンデュラ定理からこの元はゼロか P_m の成分でなければならないことがわかる．$a+b>1$ のとき，それはゼロでなければならない．

正定値メトリックのヒルベルト空間では，反交換関係 (1.6) は正定値演算子である．これは $a+b>1$ に対しては $Q_{\underbrace{1\cdots1}_{a},\underbrace{\dot{1}\cdots\dot{1}}_{b}}=0$ を意味する．$Q_{\underline{\alpha_1\cdots\alpha_a},\underline{\dot{\alpha}_1\cdots\dot{\alpha}_b}}$ は $\mathscr{L}$ のもとで既約なので，$a+b>1$ に対してはすべてゼロでなければならない．以上から，超対称代数の奇（odd）部分はすべてスピン–1/2 の演算子 $Q_\alpha{}^L$ と $\overline{Q}_{\dot{\alpha}M}$ から構成されることが結論される．

$Q_\alpha{}^L$ と $\overline{Q}_{\dot{\alpha}M}$ の反交換関係は $P_{\alpha\dot{\alpha}}$ で閉じ，

$$\{Q_\alpha{}^L,\overline{Q}_{\dot{\alpha}M}\}=P_{\alpha\dot{\alpha}}C^L{}_M. \tag{1.7}$$

ここで，$P_{\alpha\dot{\alpha}}=\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}{}^mP_m$ である．演習 (1) で，有限次元行列 $C^L{}_M$ はエルミートであることを示す．したがって，それはユニタリー変換で対角化されうる．$\{Q_1{}^L,\overline{Q}_{\dot{1}L}\}$ は正定値なので，行列 $C^L{}_M$ は正定固有値をもつ．これにより代数の奇部分の基底を次のように選んでよい．

$$\{Q_\alpha{}^L,\overline{Q}_{\dot{\alpha}M}\}=2P_{\alpha\dot{\alpha}}\delta^L{}_M. \tag{1.8}$$

今度は，ドットの付かない添字をもつ奇元の間の反交換関係を議論する．この式の右辺は対称部分と反対称部分に分解される．対称部分はスピン–1 である．コールマン–マンデュラ定理から，唯一可能な候補はローレンツ生成子 $M_{\underline{\alpha\beta}}$ で，

$$\{Q_\alpha{}^L,Q_\beta{}^M\}=\varepsilon_{\alpha\beta}X^{\underbrace{LM}}+M_{\underline{\alpha\beta}}Y^{\underline{LM}}. \tag{1.9}$$

P_m が $Q_\alpha{}^L$ と可換（演習 (2)）という事実から，$Y^{\underline{LM}}$ は消える．これから交換関係 (1.9) は次のように書ける．

$$\{Q_\alpha{}^L,Q_\beta{}^M\}=\varepsilon_{\alpha\beta}a^{\ell,\underbrace{LM}}B_\ell. \tag{1.10}$$

ここで，B_ℓ は $\mathscr{A}_1 \oplus \mathscr{A}_2$ のエルミート元，$a^{\ell,\underbrace{LM}}$ は L と M については反対称である．この結果から，超対称代数は次の形になる．

$$
\begin{aligned}
\{Q_\alpha{}^L, \overline{Q}_{\dot\beta M}\} &= 2\sigma_{\alpha\dot\beta}{}^m P_m \delta^L{}_M \\
[P_m, Q_\alpha{}^L] &= [P_m, \overline{Q}_{\dot\beta M}] = 0 \\
\{Q_\alpha{}^L, Q_\beta{}^M\} &= \varepsilon_{\alpha\beta} a^{\ell,\underbrace{LM}} B_\ell = \varepsilon_{\alpha\beta} X^{\underbrace{LM}} \\
\{\overline{Q}_{\dot\alpha L}, \overline{Q}_{\dot\beta M}\} &= \varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta} a^*{}_{\ell,\underbrace{LM}} B^\ell = \varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta} X^+{}_{\underbrace{LM}} \\
[Q_\alpha{}^L, B_\ell] &= S_\ell{}^L{}_M Q_\alpha{}^M \\
[B^\ell, \overline{Q}_{\dot\alpha L}] &= S^{*\ell}{}_L{}^M \overline{Q}_{\dot\alpha M} \\
[B_\ell, B_m] &= i c_{\ell m}{}^k B_k.
\end{aligned}
\tag{1.11}
$$

ヤコビ恒等式を使って式 (1.11) の中の係数 $a^{\ell,\underbrace{LM}}$ と $S_\ell{}^L{}_M$ をさらに制限する．通常のヤコビ恒等式は反交換関係を含むように容易に拡張される（演習 (3)）．

$$
\{A, \{B, C]] \pm \{B, \{C, A]] \pm \{C, \{A, B]] = 0. \tag{1.12}
$$

ブラケット構造 { ,] は A，B，C の偶・奇性によって交換・反交換であることを示す．符号は奇元によって決められる．もし，奇元が第 1 項の巡回置換にあれば，符号はプラスであり，そうでなければマイナスである．ヤコビ恒等式を適当な順番で調べ尽くすことにより，より速やかに最終の結果を得られる．

最初に次の恒等式を考える．

$$
[B_\ell, \{Q_\alpha{}^L, \overline{Q}_{\dot\beta M}\}] + \{Q_\alpha{}^L, [\overline{Q}_{\dot\beta M}, B_\ell]\} - \{\overline{Q}_{\dot\beta M}, [B_\ell, Q_\alpha{}^L]\} = 0. \tag{1.13}
$$

B_ℓ と P_m は可換なので第 1 項は消える．第 2 項，第 3 項から

$$
-\{Q_\alpha{}^L, \overline{Q}_{\dot\beta K}\} S^{*\ell}{}_M{}^K + \{\overline{Q}_{\dot\beta M}, Q_\alpha{}^K\} S_\ell{}^L{}_K = 0, \tag{1.14}
$$

または

$$
2P_{\alpha\dot\beta}[S^{*\ell}{}_M{}^L - S_\ell{}^L{}_M] = 0 \tag{1.15}
$$

を得る．式 (1.15) が成り立つのは

$$
S^{*\ell}{}_M{}^L = S_\ell{}^L{}_M \tag{1.16}
$$

の場合だけで，したがって $S_\ell{}^L{}_M$ はエルミートである．

次に，生成子 $X^{\underbrace{LM}} = a^{\ell,\underbrace{LM}} B_\ell$ が $\mathscr{A}_1 \oplus \mathscr{A}_2$ の不変部分代数をつくることを証明するために恒等式

$$[B_\ell, \{Q_\alpha{}^L, Q_\beta{}^M\}] + \{Q_\alpha{}^L, [Q_\beta{}^A, B_\ell]\} - \{Q_\beta{}^M, [B_\ell, Q_\alpha{}^L]\} = 0 \qquad (1\ 17)$$

を使う．式 (1.11) を使って式 (1.17) を計算して，次を得る．

$$\varepsilon_{\alpha\beta}\{[B_\ell, X^{\underbrace{LM}}] + S_\ell{}^M{}_K X^{\underbrace{LK}} + S_\ell{}^L{}_K X^{\underbrace{MK}}\} = 0. \qquad (1.18)$$

これは，B_ℓ と $X^{\underbrace{LM}}$ の交換関係が生成子 $X^{\underbrace{LM}}$ の組に閉じることを示す．$X^{\underbrace{LM}}$ は B_ℓ の一次結合なので，$X^{\underbrace{LM}}$ は $\mathscr{A} = \mathscr{A}_1 \oplus \mathscr{A}_2$ の不変部分代数を形成する．

今度は，生成子 $X^{\underbrace{LM}}$ が $\mathscr{A}$ のすべての生成子と可換であることを示すために次の恒等式を使う．

$$[Q_\alpha{}^L, \{Q_\beta{}^M, \overline{Q}_{\dot\gamma K}\}] + [Q_\beta{}^M, \{\overline{Q}_{\dot\gamma K}, Q_\alpha{}^L\}] + [\overline{Q}_{\dot\gamma K}, \{Q_\alpha{}^L, Q_\beta{}^M\}] = 0. \quad (1.19)$$

式 (1.19) と式 (1.11) から

$$\varepsilon_{\alpha\beta}[\overline{Q}_{\dot\gamma K}, X^{\underbrace{LM}}] = 0. \qquad (1.20)$$

したがって

$$[X^{\underbrace{KN}}, X^{\underbrace{LM}}] = \frac{1}{2}\varepsilon^{\beta\alpha}[\{Q_\alpha{}^K, Q_\beta{}^N\}, X^{\underbrace{LM}}] = 0. \qquad (1.21)$$

これは，$X^{\underbrace{LM}}$ が $\mathscr{A}$ のアーベリアン（不変）部分代数を形成していることを意味する．$\mathscr{A}_1$ が半単純群なので，$X^{\underbrace{LM}}$ は $\mathscr{A}_2$ の元で，$\mathscr{A}$ のすべての生成子と可換であり，

$$[X^{\underbrace{LM}}, B_\ell] = 0. \qquad (1.22)$$

この理由から，それらはセントラルチャージとよばれる．式 (1 22) を式 (1.18) に代入して

$$S_\ell{}^M{}_K X^{\underbrace{LK}} - S_\ell{}^L{}_K X^{\underbrace{MK}} = 0, \qquad (1.23)$$

そして，$X^{\underbrace{MK}} = a^{\ell,\underbrace{MK}} B_\ell$ を代入して，次式を得る

$$S_\ell{}^M{}_K a^{k,\underbrace{LK}} - S_\ell{}^L{}_K a^{k,\underbrace{MK}} = 0. \qquad (1.24)$$

${S_\ell}^M{}_K$ はエルミート，そして $a_k{}^{\underset{\sim}{MK}}$ は反対称なので次が結論される．

$$ {S_\ell}^M{}_K a^{k,\underset{\sim}{KL}} = -a^{k,\underset{\sim}{MK}} S^{*\ell}{}_K{}^L. \qquad \textbf{(1.25)} $$

演習 (4) で，${S_\ell}^M{}_K$ が $\mathscr{A}_1 \oplus \mathscr{A}_2$ の表現を形成することを示す．式 (1.25) から，行列 a_k が，表現 S_ℓ をその複素共役 $-S_\ell{}^*$ に関連付けることがわかる．セントラルチャージは，代数 $\mathscr{A}_1 \oplus \mathscr{A}_2$ が，このような内部関連を許すときのみ存在する．自明な例は，$S_\ell{}^{\underset{\sim}{MK}} = 0$ で与えられる．もう一例は直交群の場合で，そこでは $S_\ell = -S_\ell{}^*$ である．三つ目の例は演習 (5) で与えられる．

すべてのヤコビ恒等式を調べればわかることであるが，これ以上の制限は出ない．結局最も一般的な超対称代数は次で与えられる．

$$
\begin{aligned}
[P_m, P_n] &= 0\\
[P_m, Q_\alpha{}^L] &= [P_m, \overline{Q}_{\dot\alpha L}] = 0\\
[P_m, B_\ell] &= [P_m, X^{\underset{\sim}{LM}}] = 0\\
\{Q_\alpha{}^L, \overline{Q}_{\dot\alpha M}\} &= 2\sigma_{\alpha\dot\alpha}{}^m P_m \delta^L{}_M\\
\{Q_\alpha{}^L, Q_\beta{}^M\} &= \varepsilon_{\alpha\beta} X^{\underset{\sim}{LM}}\\
\{\overline{Q}_{\dot\alpha L}, \overline{Q}_{\dot\beta M}\} &= \varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta} X^+{}_{\underset{\sim}{LM}}\\
[X^{\underset{\sim}{LM}}, \overline{Q}_{\dot\alpha K}] &= [X^{\underset{\sim}{LM}}, Q_\alpha{}^K] = 0\\
[X^{\underset{\sim}{LM}}, X^{\underset{\sim}{KN}}] &= [X^{\underset{\sim}{LM}}, B_\ell] = 0\\
[B_\ell, B_m] &= i c_{\ell m}{}^k B_k\\
[Q_\alpha{}^L, B_\ell] &= S_\ell{}^L{}_M Q_\alpha{}^M\\
[\overline{Q}_{\dot\alpha L}, B^\ell] &= -S^{*\ell}{}_L{}^M \overline{Q}_{\dot\alpha M}\\
X^{\underset{\sim}{LM}} &= a^{\ell,\underset{\sim}{LM}} B_\ell.
\end{aligned}
\qquad \textbf{(1.26)}
$$

これが相対論的場の理論に矛盾しない S–行列の対称性の最も一般的な graded リー代数である．もし，セントラルチャージがあれば $X^{\underset{\sim}{LM}} = a^{\ell,\underset{\sim}{LM}} B_\ell$ の形になり，a^ℓ は表現 S_ℓ と $S_\ell{}^*$ を関連付ける．

文　　献

S. Coleman and J. Mandula, Phys. Rev. **159**, 1251 (1967).

R. Haag, J. Lopuszanski, and M. Sohnius, Nucl. Phys. **B88**, 257 (1975).

重要な式

$$\begin{aligned}
\{Q_\alpha{}^A, \overline{Q}_{\dot\beta,B}\}_+ &= 2\sigma_{\alpha\dot\beta}{}^m P_m \delta^A{}_B \\
\{Q_\alpha{}^A, Q_\beta{}^B\}_+ &= \{\overline{Q}_{\dot\alpha A}, \overline{Q}_{\dot\beta B}\}_+ = 0 \\
[P_m, Q_\alpha{}^A]_- &= [P_m, \overline{Q}_{\dot\alpha A}]_- = 0 \\
[P_m, P_n]_- &= 0
\end{aligned} \tag{I}$$

$$\{A, \{B, C]] \pm \{B, \{C, A]] \pm \{C, \{A, B]] = 0 \tag{1.12}$$

$$S^{*\ell}{}_M{}^L = S_\ell{}^L{}_M \tag{1.16}$$

$$S_\ell{}^M{}_K a^{k,\underset{\smile}{KL}} = -a^{k,\underset{\smile}{MK}} S^{*\ell}{}_K{}^L \tag{1.25}$$

$$\begin{aligned}
[P_m, P_n] &= 0 \\
[P_m, Q_\alpha{}^L] &= [P_m, \overline{Q}_{\dot\alpha L}] = 0 \\
[P_m, B_\ell] &= [P_m, X^{\underset{\smile}{LM}}] = 0 \\
\{Q_\alpha{}^L, \overline{Q}_{\dot\alpha M}\} &= 2\sigma_{\alpha\dot\alpha}{}^m P_m \delta^L{}_M \\
\{Q_\alpha{}^L, Q_\beta{}^M\} &= \varepsilon_{\alpha\beta} X^{\underset{\smile}{LM}} \\
\{\overline{Q}_{\dot\alpha L}, \overline{Q}_{\dot\beta M}\} &= \varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta} X^+{}_{\underset{\smile}{LM}} \\
[X^{\underset{\smile}{LM}}, \overline{Q}_{\dot\alpha K}] &= [X^{\underset{\smile}{LM}}, Q_\alpha{}^K] = 0 \\
[X^{\underset{\smile}{LM}}, X^{\underset{\smile}{KN}}] &= [X^{\underset{\smile}{LM}}, B_\ell] = 0 \\
[B_\ell, B_m] &= ic_{\ell m}{}^k B_k \\
[Q_\alpha{}^L, B_\ell] &= S_\ell{}^L{}_M Q_\alpha{}^M \\
[\overline{Q}_{\dot\alpha L}, B^\ell] &= -S^{*\ell}{}_L{}^M \overline{Q}_{\dot\alpha M} \\
X^{\underset{\smile}{LM}} &= a^{\ell,\underset{\smile}{LM}} B_\ell
\end{aligned} \tag{1.26}$$

演　　習

(1)　式 (1.7) の $C^L{}_M$ がエルミートであることを，反交換関係 (1.7) とその複素共

役とを比較することによって示せ．

(2)　$[Q_\alpha, P_m] = 0$ を示せ．スピン–3/2 の生成子がないことから出発する．$[P_{\alpha\dot{\alpha}}, Q_\gamma{}^L] = Z^L{}_M \varepsilon_{\alpha\gamma} \overline{Q}_{\dot{\alpha}}{}^M$ を導け．ここで $Z^L{}_M$ は何組かの数．$[P_{\beta\dot{\beta}}, [P_{\alpha\dot{\alpha}}, Q_\gamma{}^L]]$ に対するヤコビ恒等式を使ってすべての $Z^L{}_M$ がゼロであることを示す．これは $Q_\alpha{}^L$ が並進不変であることを示している．

(3)　ヤコビ恒等式 (1.12) を示せ．特に以下を証明せよ．

$$[B_1, [B_2, B_3]] + [B_2, [B_3, B_1]] + [B_3, [B_1, B_2]] = 0$$

$$[Q_1, [B_2, B_3]] + [B_2, [B_3, Q_1]] + [B_3, [Q_1, B_2]] = 0$$

$$[B_1, \{Q_2, Q_3\}] + \{Q_2, [Q_3, B_1]\} - \{Q_3, [B_1, Q_2]\} = 0$$

$$[Q_1, \{Q_2, Q_3\}] + [Q_2, \{Q_3, Q_1\}] + [Q_3, \{Q_1, Q_2\}] = 0.$$

(4)　恒等式

$$[B_\ell, [B_m, Q_\alpha{}^L]] + [B_m, [Q_\alpha{}^L, B_\ell]] + [Q_\alpha{}^L, [B_\ell, B_m]] = 0$$

を用いて

$$[S_m, S_\ell] = ic_{m\ell}{}^k S_k$$

を証明せよ（行列 S_ℓ は元 $S_\ell{}^K{}_M$ をもつ）．$-S^*{}_\ell$ が同じ交換関係を満たすことを示せ．

(5)　パウリ行列 $\boldsymbol{\sigma}$ とその共役 $-\boldsymbol{\sigma}^*$ は SU(2) の表現をつくる．ε はそれらの間の内的絡みを与えることを示せ．Z_1 と Z_2 がセントラルチャージならば，交換関係

$$\{Q_\alpha{}^L, Q_\beta{}^M\} = \varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon^{LM}(c_1 Z_1 + ic_2 Z_2)$$

がヤコビ恒等式と矛盾しないことを証明せよ．

2. 超対称代数の表現

超対称代数の刺激的な点は，超対称性の生成子 Q_α が保存カレント $J_\alpha{}^m$

$$
\begin{aligned}
Q_\alpha &= \int d^3\mathbf{x}\, J_\alpha{}^0 \\
\frac{\partial}{\partial x^m} J_\alpha{}^m &= 0
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

によって表現される場の量子論が存在することである．カレント $J_\alpha{}^m$ は場の演算子で表される．超対称代数 (I) は同時刻正準交換関係のために満足され，ヒルベルト空間は超対称代数の表現空間を張る．本章では，一粒子状態の超対称表現を学ぶ．

エネルギー・運動量 4 元ベクトル P_m は超対称生成子 Q_α，$\overline{Q}_{\dot\alpha}$ と可換である．質量演算子 P^2 はカシミール演算子なので，超対称代数の既約表現は質量が等しい．われわれは時間的（$P^2 < 0$）と光的（$P^2 = 0$）な場合の既約表現を誘導（induced）表現の方法で導く．

その前に，超対称代数のすべての表現は等しい数のフェルミオン状態とボソン状態を含むことを証明する．はじめに，フェルミ粒子数演算子 N_F を導入し，$(-)^{N_F}$ がボソン状態には固有値 $+1$，フェルミオン状態には固有値 -1 をもつとする．ただちに次が成り立つ．

$$
(-)^{N_F} Q_\alpha = -Q_\alpha (-)^{N_F}. \tag{2.2}
$$

代数のあらゆる有限次元表現（トレースが適切に定義されているような）に対して，次が成り立つ．

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Tr}[(-)^{N_F}\{Q_\alpha{}^A, \overline{Q}_{\dot\beta B}\}] &= \mathrm{Tr}[(-)^{N_F}(Q_\alpha{}^A \overline{Q}_{\dot\beta B} + \overline{Q}_{\dot\beta B} Q_\alpha{}^A)] \\
&= \mathrm{Tr}[-Q_\alpha{}^A(-)^{N_F}\overline{Q}_{\dot\beta B} + Q_\alpha{}^A(-)^{N_F}\overline{Q}_{\dot\beta B}] \\
&= 0.
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

ここで，式 (2.2) とトレースの循環性を使った．超対称代数 (I) から

$$\{Q_\alpha{}^A, \overline{Q}_{\dot{\beta}B}\} = 2\sigma_{\alpha\dot{\beta}}{}^m P_m \delta^A{}_B \tag{2.4}$$

を代入して次の結論を得る．

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}[(-)^{N_F}\{Q_\alpha{}^A, \overline{Q}_{\dot{\beta}}{}^B\}] &= 2\sigma_{\alpha\dot{\beta}}{}^m \delta^A{}_B\,\mathrm{Tr}[(-)^{N_F} P_m] \\ &= 0.\end{aligned} \tag{2.5}$$

ゼロでない決まった運動量 P_m に対してこれは，

$$\mathrm{Tr}(-)^{N_F} = 0 \tag{2.6}$$

に帰着し，超対称表現はボソンの状態数とフェルミオンの状態数を同数含むことを示している．

質量をもつ一粒子状態，$P^2 = -M^2$ に対応する超対称代数の表現を構築する準備ができた．静止系に移る（boost）と，$P_m = (-M, 0, 0, 0)$．この系では，超対称代数 (I) は次の形になる．

$$\begin{aligned}\{Q_\alpha{}^A, \overline{Q}_{\dot{\beta}B}\} &= 2M\delta_{\alpha\dot{\beta}}\delta^A{}_B \\ \{Q_\alpha{}^A, Q_\beta{}^B\} &= \{\overline{Q}_{\dot{\alpha}A}, \overline{Q}_{\dot{\beta}B}\} = 0.\end{aligned} \tag{2.7}$$

添字 A と B は 1〜N を走る．生成元 Q は次のようにリスケーリングしてよい．

$$\begin{aligned}a_\alpha{}^A &= \frac{1}{\sqrt{2M}}\,Q_\alpha{}^A \\ (a_\alpha{}^A)^+ &= \frac{1}{\sqrt{2M}}\,\overline{Q}_{\dot{\alpha}A}\end{aligned} \tag{2.8}$$

これにより，式 (2.7) は $2N$ 個のフェルミオンの生成演算子 $(a_\alpha{}^A)^+$，消滅演算子 $a_\alpha{}^A$，の代数と同型になる．

$$\begin{aligned}\{a_\alpha{}^A, (a_\beta{}^B)^+\} &= \delta_\alpha{}^\beta\delta^A{}_B \\ \{a_\alpha{}^A, a_\beta{}^B\} &= \{(a_\alpha{}^A)^+, (a_\beta{}^B)^+\} = 0.\end{aligned} \tag{2.9}$$

この代数の表現はよく知られている．それらは，クリフォード真空（Cliford vacuum）Ω から構築される．クリフォード真空は次式で定義される．

$$a_\alpha{}^A\Omega = 0. \tag{2.10}$$

ここで，通常の場合と対照的に，$P^2\Omega = -M^2\Omega$ である．状態は Ω に生成演算子 $(a_\alpha{}^A)^+$ を作用させて得られる：

$$\Omega^{(n)\alpha_1}{}_{A_1}\cdots{}^{\alpha_n}{}_{A_n} = \frac{1}{\sqrt{n!}}(a_{\alpha_1}{}^{A_1})^+\cdots(a_{\alpha_n}{}^{A_n})^+\Omega. \tag{2.11}$$

$(a_\alpha{}^A)^+$ は反交換なので，$\Omega^{(n)}$ は添字 $\alpha_i A_i$，$\alpha_j A_j$ の 2 対の交換に対して反対称である．添字の各対は $2N$ の異なる値をとるので，n は $2N$ に等しいかそれより小さい．与えられた任意の n に対して，$\binom{2N}{n}$ 個の異なる状態が存在する．すべての n にわたって加えると，表現 (2.11) の次元（dimension）：

$$d = \sum_{n=0}^{2N}\binom{2N}{n} = 2^{2N} \tag{2.12}$$

を得る．

真空 Ω が縮退していなければ，式 (2.11) を基本的既約有質量多重項（fundamental irreducible massive multiplet）とよぶ．それは，次元 2^{2N} で，2^{2N-1} 個のフェルミオン的状態と 2^{2N-1} 個のボソン的状態から成る．最も高いスピン状態は，スピノル添字を可能なかぎり対称化して得られる．なぜならば，同時に 2 番目の添字を反対称化しなければならないので，N 個のスピノル添字のみが対称化されなければならない．これによって，スピンは $N/2$ までになる．基本多重項の最も高いスピンは $N/2$ で厳密に 1 個である．

すべてのほかの有質量多重項は，安定群（stability group）のもとで不変でない真空 Ω に基づいている．それらの表現は，基本多重項の表現をもつ Ω の表現を構成すればよい．

2，3 の例をあげる．$N=1$ の場合には，基本表現は次の状態から成る．

$$\begin{gathered}\Omega\\ (a_\alpha)^+\Omega\\ \frac{1}{\sqrt{2}}(a_\alpha)^+(a_\beta)^+\Omega = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\,\varepsilon^{\alpha\beta}(a^\gamma)^+(a_\gamma)^+\Omega.\end{gathered} \tag{2.13}$$

2 個のスピン–0 と 1 個のスピン–1/2 の状態が含まれる．真空 Ω_j がスピン–j $(j>0)$ をもつときは，それは安定群（stability group）SU(2) の 1 個の $(2j+1)$ 次元表現に属する．これは，スピン–$(j, j+1/2, j-1/2, j)$ からなる 1 個の多重項になる．$N=1,2,3,4$ についてこの結果は次の表のようになる．

$\underline{N=1}$

Spin	Ω_0	$\Omega_{1/2}$	Ω_1	$\Omega_{3/2}$
0	2	1		
1/2	1	2	1	
1		1	2	1
3/2			1	2
2				1

$\underline{N=2}$

Spin	Ω_0	$\Omega_{1/2}$	Ω_1
0	5	4	1
1/2	4	6	4
1	1	4	6
3/2		1	4
2			1

$\underline{N=3}$

Spin	Ω_0	$\Omega_{1/2}$
0	14	14
1/2	14	20
1	6	15
3/2	1	6
2		1

$\underline{N=4}$

Spin	Ω_0
0	42
1/2	48
1	27
3/2	8
2	1

代数 (2.9) の表現空間 (2 11) は，その代数の不変群の表現空間をも張る．式 (2.9) から可能な不変群は SU(2) $\otimes$ U(N) であることは明らかである．しかし，SO(4N) が式 (2.9) のより大きな不変群である．それは，SU(2) $\otimes$ U(N) と SU(2) $\otimes$ USp(2N) を部分群として含んでいる．SO(4N) 対称性を明白にするためには式 (2.9) をクリフォード代数として書くのが便利である．そのために，次の演算子を定義する．

$$\begin{aligned}\Gamma^{\ell} &= \frac{1}{\sqrt{2}}[a_1{}^{\ell} + (a_1{}^{\ell})^{+}] \\ \Gamma^{N+\ell} &= \frac{1}{\sqrt{2}}[a_2{}^{\ell} + (a_2{}^{\ell})^{+}] \\ \Gamma^{2N+\ell} &= \frac{i}{\sqrt{2}}[a_1{}^{\ell} - (a_1{}^{\ell})^{+}] \\ \Gamma^{3N+\ell} &= \frac{i}{\sqrt{2}}[a_2{}^{\ell} - (a_2{}^{\ell})^{+}].\end{aligned} \tag{2.14}$$

添字 1，2 は SU(2) スピノル添字を表し，指標 ℓ は 1〜N を走る．定義から $2N$ 個の演算子 (2.14) はエルミートである．さらに，それらは次の反交換関係に従う：

$$\{\Gamma^r, \Gamma^s\} = \delta^{rs} \tag{2.15}$$

ここで r，$s = 1, 2, \cdots, 4N$．これは SO($4N$) 不変群をもつクリフォード代数である．基本表現の 2^{2N} 個の状態は SO($4N$) のスピノル表現を張る．このスピノル表現は二つの既約表現を含み，それぞれ 2^{2N-1} 次元であり，ボソン状態とフェルミオン状態に対応する．

代数 (2.9) は SU(2) $\otimes$ USp($2N$) 対称性を示すように書き直すことができる．これには新しい演算子の組を次で定義する．

$$\begin{aligned}q_\alpha{}^{\ell} &= a_\alpha{}^{\ell} \\ q_\alpha{}^{N+\ell} &= \sum_{\beta=1}^{2} \varepsilon_{\alpha\beta}(a_\beta{}^{\ell})^{+}.\end{aligned} \tag{2.16}$$

ここで，$\ell = 1, 2, \cdots, N$．これらの演算子はエルミート共役に対して次のように変換する：

$$\begin{aligned}(q_\alpha{}^{\ell})^{+} &= (a_\alpha{}^{\ell})^{+} = \varepsilon^{\alpha\beta} q_\beta{}^{N+\ell} \\ (q_\alpha{}^{N+\ell})^{+} &= -\varepsilon^{\alpha\beta} a_\beta{}^{\ell} = -\varepsilon^{\alpha\beta} q_\beta{}^{\ell}.\end{aligned} \tag{2.17}$$

式 (2.17) はよりコンパクトな形

$$(q_\alpha{}^{r})^{+} = \varepsilon^{\alpha\beta} \Lambda^{rt} q^{t}{}_{\beta} \tag{2.18}$$

に書き直せる．r，t は 1〜$2N$ を走り，Λ は次のシンプレクティック行列である：

$$\Lambda = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline -1 & 0 \end{array}\right). \tag{2.19}$$

演算子 q の反交換関係

$$\{q_\alpha{}^r, q_\beta{}^t\} = -\varepsilon_{\alpha\beta}\Lambda^{rt} \tag{2.20}$$

は，SU(2) ⊗ USp($2N$) 不変性を示している．この不変群は，スピンの決まった状態が USp($2N$) のもとで既約的に変換するので，役に立つ．さて，無質量 $P^2=0$ の場合を解析しよう．$P_m=(-E,0,0,E)$ となる特定の光速度系に移ろう．この系では，超対称代数 (I) は次のようになる．

$$\begin{aligned}\{Q_\alpha{}^A, \overline{Q}_{\dot\beta B}\} &= 2\begin{pmatrix}2E & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\delta^A{}_B\\ \{Q_\alpha{}^A, Q_\beta{}^B\} &= \{\overline{Q}_{\dot\alpha A}, \overline{Q}_{\dot\beta B}\} = 0.\end{aligned} \tag{2.21}$$

Q のリスケール

$$\begin{aligned}a^A &= \frac{1}{2\sqrt{E}}\,Q_1{}^A\\ a^+{}_A &= \frac{1}{2\sqrt{E}}\,\overline{Q}_{\dot 1}{}^A = (a^A)^+\end{aligned} \tag{2.22}$$

で，代数 (2.21) は N 個の生成，消滅演算子 $a^+{}_A$，a^A から成ることに気付く．

$$\begin{aligned}\{a^A, a^+{}_B\} &= \delta^A{}_B\\ \{a^A, a^B\} &= \{a^+{}_A, a^+{}_B\} = 0.\end{aligned} \tag{2.23}$$

演算子 $Q_2{}^A$，$\overline{Q}_{\dot 2 A}$ は全体的に反交換なので，ゼロで表されなければならない．

演算子 $a^+{}_A$ と a^A とは状態のヘリシティを 1/2 ずつ上げ下げをする．その結果，a^A は最低ヘリシティの状態（$\underline{\lambda}$ とする）を消滅させる．

$$a^A\Omega_{\underline{\lambda}} = 0. \tag{2 24}$$

状態

$$\Omega^{(n)}{}_{\underline{\lambda}+\frac{1}{2}n, A_1\cdots A_n} = \frac{1}{\sqrt{n!}}\,a^+{}_{A_n}\cdots a^+{}_{A_1}\Omega_{\underline{\lambda}} \tag{2 25}$$

は生成演算子 $a^+{}_A$ をクリフォード真空 $\Omega_{\underline{\lambda}}$ に作用させることで構成される．状態 $\Omega^{(n)}_{\underline{\lambda}+n/2, A_1\cdots A_n}$ のヘリシティは $\underline{\lambda}+n/2$ である．それらは，添字 $A_1\cdots A_n$ に関して反対称で $\binom{N}{n}$ 回縮退している．この表現の最大ヘリシティの状態のヘリシティは $\overline{\lambda}=\underline{\lambda}+N/2$ で，したがって，表現 (2.25) の次元は 2^N である．このことから，1 個の有質量表現は 2^N 個の無質量表現に分離することがわかる．

この結果をまとめると，$N=1,2,3,4$ に対しては以下の表になる：

$\underline{N=1}$

hel. \ λ	-2	$-3/2$	-1	$-1/2$	0	$1/2$	1	$3/2$
2								1
$3/2$							1	1
1						1	1	
$1/2$					1	1		
0				1	1			
$-1/2$			1	1				
-1		1	1					
$-3/2$	1	1						
-2	1							

$\underline{N=2}$

hel. \ λ	-2	$-3/2$	-1	$-1/2$	0	$1/2$	1
2							1
$3/2$						1	2
1					1	2	1
$1/2$				1	2	1	
0			1	2	1		
$-1/2$		1	2	1			
-1	1	2	1				
$-3/2$	2	1					
-2	1						

$\underline{N=3}$

hel. \ λ	-2	$-3/2$	-1	$-1/2$	0	$1/2$
2						1
$3/2$					1	3
1				1	3	3
$1/2$			1	3	3	1
0		1	3	3	1	
$-1/2$	1	3	3	1		
-1	3	3	1			
$-3/2$	3	1				
-2	1					

$\underline{N=4}$

hel. \ $\underline{\lambda}$	-2	$-3/2$	-1	$-1/2$	0
2					1
$3/2$				1	4
1			1	4	6
$1/2$		1	4	6	4
0	1	4	6	4	1
$-1/2$	4	6	4	1	
-1	6	4	1		
$-3/2$	4	1			
-2	1				

CPT 不変な理論では，状態数は一般に 2 倍になる，それは CPT がヘリシティの符号を反転させるからである．しかし，$N=2$, $\underline{\lambda}=-1/2$；$N=4$, $\underline{\lambda}=-1$；$N=8$, $\underline{\lambda}=-2$ の多重項は自動的に CPT 完備であることに注意せよ．

本章の終わりに，セントラルチャージをもつ超対称代数 (1.26) を考える．$P^2=-M^2$ を仮定し静止系で代数を考える：

$$
\begin{aligned}
\{Q_\alpha{}^L, (Q_\beta{}^M)^+\} &= 2M\delta_\alpha{}^\beta \delta^L{}_M \\
\{Q_\alpha{}^L, Q_\beta{}^M\} &= \varepsilon_{\alpha\beta} Z^{LM} \\
\{(Q_\alpha{}^L)^+, (Q_\beta{}^M)^+\} &= \varepsilon^{\alpha\beta} Z^*{}_{LM} \\
Z^{LM} &= -Z^{ML}.
\end{aligned}
\tag{2.26}
$$

セントラルチャージ Z^{LM} はすべての生成元と可換なので，セントラルチャージが固有値 Z^{LM} をもち対角的であるような基底が選べる．これらの固有値は，反対称 $N\times N$ 行列を成す．このような行列はユニタリー変換：

$$
\tilde{Z}^{LM} = U^L{}_K U^M{}_N Z^{KN} \tag{2.27}
$$

で標準形（standard form）へ回転してよい．

標準形は次で与えられる．

$$
\begin{aligned}
\tilde{Z} &= \varepsilon \otimes D && (N：偶数) \\
\tilde{Z} &= \begin{pmatrix} \varepsilon \otimes D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} && (N：奇数)
\end{aligned}
\tag{2.28}
$$

ここで，D は正の実数固有値 Z_m をもつ対角行列，ε は 2×2 反対称行列で $\varepsilon^{12}=1$ である．

N が偶数の場合を考えてみる（N が奇数の場合も類似である）．式 (2.28) に準じて添字 L，M を次のように分解することから始める．

$$L=(a,m), \qquad M=(b,n). \tag{2.29}$$

ここで，a，$b=1,2$ で m，$n=1,\cdots,N/2$ である．${Q_\alpha}^L$ にユニタリー変換をして

$$\tilde{Q}_\alpha{}^L = U^L{}_K Q_\alpha{}^K. \tag{2.30}$$

これにより代数 (2.26) は次の形に書ける：

$$\begin{aligned}
\{\tilde{Q}_\alpha{}^{am}, (\tilde{Q}_\beta{}^{bn})^+\} &= 2M\delta_\alpha{}^\beta \delta^a{}_b \delta^m{}_n \\
\{\tilde{Q}_\alpha{}^{am}, \tilde{Q}_\beta{}^{bn}\} &= \varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon^{ab}\delta^{mn} Z_n \\
\{(\tilde{Q}_\alpha{}^{am})^+, (\tilde{Q}_\beta{}^{bn})^+\} &= \varepsilon^{\alpha\beta}\varepsilon_{ab}\delta_{mn} Z_n.
\end{aligned} \tag{2.31}$$

演算子 $\tilde{Q}_\alpha{}^{am}$ と $(\tilde{Q}_\alpha{}^{am})^+$ は線形結合

$$\begin{aligned}
a_\alpha{}^m &= \frac{1}{\sqrt{2}}[\tilde{Q}_\alpha{}^{1m} + \varepsilon_{\alpha\rho}(\tilde{Q}_\rho{}^{2m})^+] \\
b_\alpha{}^m &= \frac{1}{\sqrt{2}}[\tilde{Q}_\alpha{}^{1m} - \varepsilon_{\alpha\rho}(\tilde{Q}_\rho{}^{2m})^+]
\end{aligned} \tag{2.32}$$

とその共役 $(a_\alpha{}^m)^+$ と $(b_\alpha{}^m)^+$ で書ける．演算子 a と b は次の代数を満たす：

$$\begin{aligned}
\{a_\alpha{}^n, a_\beta{}^m\} = \{b_\alpha{}^n, b_\beta{}^m\} &= \{a_\alpha{}^n, b_\beta{}^m\} = 0 \\
\{a_\alpha{}^n, (a_\beta{}^m)^+\} &= \delta_{\alpha\beta}\delta^{mn}(2M+Z_n) \\
\{b_\alpha{}^n, (b_\beta{}^m)^+\} &= \delta_{\alpha\beta}\delta^{mn}(2M-Z_n).
\end{aligned} \tag{2.33}$$

これらの関係からすべての n に対して $Z_n \leqq 2M$ であることがわかる．もし一つの組が $Z_i=2M$，$i=1,\cdots,r$，ならば，それに対応する演算子 b_i はゼロでなければならない．これにより $2(N-r)$ 個の生成と消滅の演算子のクリフォード代数になる　この代数の表現については以前に議論した．

文　　献

W. Nahm, Nucl. Phys. **B135**, 149 (1978).
S. Ferrara, C. A. Savoy, and B Zumino, Phys. Lett. **100B**, 393 (1981)

演　　習

(1)　表現 (2.11) には，同数のフェルミオン状態とボソン状態があることを示せ．各ボソン状態には $+1$ を，フェルミオン状態には -1 を割り振れ．その後，次の計算を実行せよ．

$$\sum_{n=0}^{2N}(-1)^n\binom{2N}{n}.$$

(2)　基本多重項中の最大スピンは正確に 1 回だけ起こることを示せ．最大スピンを z–方向にもつ状態を構成せよ．この状態が唯一であることを示せ．

(3)　SU(2) 変換のもとで，$\varepsilon_{\alpha\beta}(\chi_\beta)^+$ が χ_β のように変換することを示せ．これは，複素共役が，SU(2) の添字を上げたり下げたりすることを示している（特に，SL(2,C) の下付点付添字は，SU(2) 回転部分群のもとでの上付添字のように変換する）．

3. 成　分　場

超対称な場の理論を構成するために，質量殻条件による制限がない場によって超対称代数 (I) を表現しなければならない．反交換パラメーター $\xi^\alpha, \overline{\xi}_{\dot{\alpha}}$ が仕事を簡単化する：

$$\{\xi^\alpha, \xi^\beta\} = \{\xi^\alpha, Q_\beta\} = \cdots = [P_m, \xi^\alpha] = 0. \tag{3.1}$$

これらのパラメーターを使うと，超対称代数全体を交換関係で表せる：

$$\begin{aligned}
&[\xi Q, \overline{\xi}\,\overline{Q}] = 2\xi\sigma^m\overline{\xi}P_m \\
&[\xi Q, \xi Q] = [\overline{\xi}\,\overline{Q}, \overline{\xi}\,\overline{Q}] = 0 \\
&[P^m, \xi Q] = [P^m, \overline{\xi}\,\overline{Q}] = 0.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

ここで付録 A に概説してある和則表記：

$$\xi Q = \xi^\alpha Q_\alpha, \qquad \overline{\xi}\,\overline{Q} = \overline{\xi}_{\dot{\alpha}}\overline{Q}^{\dot{\alpha}}$$

を用いている．

成分多重項は，一組の場 $(A, \psi, \cdot\ \cdot)$ から成り，その上に無限小変換 δ_ξ：

$$\begin{aligned}
&\delta_\xi A = (\xi Q + \overline{\xi}\,\overline{Q}) \times A \\
&\delta_\xi \psi = (\xi Q + \overline{\xi}\,\overline{Q}) \times \psi \\
&\cdots
\end{aligned} \tag{3.3}$$

を定義する．無限小変換 δ_ξ は，式 (3.2) により次式を満たす．

$$\begin{aligned}
(\delta_\eta\delta_\xi - \delta_\xi\delta_\eta)A &= 2(\eta\sigma^m\overline{\xi} - \xi\sigma^m\overline{\eta})P_m A \\
&= -2i(\eta\sigma^m\overline{\xi} - \xi\sigma^m\overline{\eta})\partial_m A \\
&\cdots
\end{aligned} \tag{3.4}$$

この超対称変換は，テンソル場をスピノル場に，あるいはその逆に写像する．超対称代数 (I) から，Q は質量次元 1/2 をもつ．したがって，（質量）次元 ℓ の場は，次元 $\ell+1/2$ の場，または，次元の低い場の微分に変換する．

スカラー場 A から出発し，スピノル場 ψ をスカラー場 A の変換：

$$\delta_\xi A = \sqrt{2}\,\xi\psi \tag{3.5}$$

を通じて定義する．場 ψ はより高い次元のテンソル場と A 自身の微分とに変換する．

$$\delta_\xi \psi = i\sqrt{2}\,\sigma^m\bar{\xi}\partial_m A + \sqrt{2}\,\xi F. \tag{3.6}$$

微分項 $\partial_m A$ の係数は

$$\delta_\eta\delta_\xi A = 2i\xi\sigma^m\bar{\eta}\partial_m A + 2\xi\eta F \tag{3.7}$$

の交換関係が式 (3.4) の意味で閉じることを保証するように選ばれる．場 ψ に作用する同様な交換関係は次のようになる．

$$\begin{aligned}(\delta_\eta\delta_\xi - \delta_\xi\delta_\eta)\psi = &-2i(\eta\sigma^n\bar{\xi} - \xi\sigma^n\bar{\eta})\partial_n\psi \\ &- i\sigma^n\bar{\sigma}^m\partial_m\psi[\eta\sigma^n\bar{\xi} - \xi\sigma^n\bar{\eta}] + \sqrt{2}(\xi\delta_\eta F - \eta\delta_\xi F).\end{aligned} \tag{3.8}$$

もし，

$$\delta_\xi F = i\sqrt{2}\,\bar{\xi}\bar{\sigma}^m\partial_m\psi \tag{3.9}$$

であれば，式 (3.6) から F に対する交換関係も同様に閉じる．

もし，場の方程式 $-i\bar{\sigma}^n\partial_n\psi = m\bar{\psi}$ を使ったなら，式 (3.9) は $F = -\,mA^*$ で満足される．この場合,「変換 (3.5), (3.6) は場の方程式を通じて閉じる」という．拡大された超対称性では，しばしば交換関係は場の方程式を使って閉じざるをえない．なぜならば，理論の多重項全体の構造がいまだ不明だからである．

われわれの構成した成分多重項：

$$\begin{aligned}&\delta_\xi A = \sqrt{2}\,\xi\psi \\ &\delta_\xi\psi = i\sqrt{2}\,\sigma^m\bar{\xi}\partial_m A + \sqrt{2}\,\xi F \\ &\delta_\xi F = i\sqrt{2}\,\bar{\xi}\bar{\sigma}^m\partial_m\psi\end{aligned} \tag{3.10}$$

は，カイラルまたはスカラー多重項とよばれる．これらの場は，超対称代数 (I) の線形表現を構成する．A の次元が 1 ならば，ψ の次元は 3/2，一方，F は次元 2 で補助場の役割を仮定する．

式 (3.10) から，F は δ_ξ のもとで空間微分に変換する．これは，与えられた多重項の中で最も高い次元をもつ成分場について常に成り立つ．

不変な作用を構成するためには，空間微分に変換する場の組合せを見つければ十分である．この組合せは，

$$\mathscr{L}_0 = i\partial_n\overline{\psi}\,\overline{\sigma}^n\psi + A^*\Box A + F^*F \tag{3.11}$$

と

$$\mathscr{L}_m = AF + A^*F^* - \frac{1}{2}\psi\psi - \frac{1}{2}\overline{\psi}\,\overline{\psi} \tag{3.12}$$

で与えられる．完全なラグランジアン

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_0 + m\mathscr{L}_m \tag{3.13}$$

から運動方程式を決めると

$$\begin{aligned} i\overline{\sigma}^n\partial_n\psi + m\overline{\psi} &= 0 \\ F + mA^* &= 0 \\ \Box A + mF^* &= 0. \end{aligned} \tag{3.14}$$

これらは，ワイル・スピノル ψ，複素スカラー A（ともに質量 m）を記述している．

ラグランジアン (3.13) は奇妙な性質

$$\mathscr{L} = :\mathscr{L}: \tag{3.15}$$

をもつ．ここで，: : はノーマルオーダーを意味する．これは，超対称な理論は，与えられた質量をもつフェルミオンとボソンを同数含まなければならないことを簡潔に示している．式 (3.15) は超対称性が破られないかぎり成り立つ．また，超対称性が破れていない理論ではエネルギー・運動量テンソル T^{mn} の真空期待値はゼロであることが期待できる．これは，超対称（電）荷 Q_α

$$Q_\alpha = \int d^3\mathbf{x}\, J_\alpha{}^0 \tag{3.16}$$

の局所（電）流 $J_\alpha{}^m$ を考えることで理解できる．超対称代数 (I) はエネルギー・運動量テンソルを次の交換子として与える．

$$\{\overline{Q}_{\dot\alpha}, J^n_\alpha\} = 2\sigma_{\alpha\dot\alpha}{}^m T_m{}^n + \text{S.T.} \tag{3.17}$$

付加的なシュウィンガー項(S.T.)の真空期待値はゼロである．したがって，$\overline{Q}_{\dot\alpha}|0\rangle = 0$ であるかぎり，$\langle 0|T_m{}^n|0\rangle = 0$．この事情が観測されている宇宙の宇宙定数がゼロであることを説明することに最初に気付いたのはブルーノ・ズミノ（Bruno Zumino）である．

文　献

J. Wess and B. Zumino, Nucl. Phys. **B70**, 39 (1974).
B. Zumino, Nucl. Phys. **B89**, 535 (1975).

重 要 な 式

$$\begin{aligned}(\delta_\eta\delta_\xi - \delta_\xi\delta_\eta)A &= 2(\eta\sigma^m\overline{\xi} - \xi\sigma^m\overline{\eta})P_m A \\ &= -2i(\eta\sigma^m\overline{\xi} - \xi\sigma^m\overline{\eta})\partial_m A\end{aligned} \tag{3.4}$$

$\cdots$

$$\begin{aligned}\delta_\xi A &= \sqrt{2}\,\xi\psi \\ \delta_\xi\psi &= i\sqrt{2}\,\sigma^m\overline{\xi}\partial_m A + \sqrt{2}\,\xi F \\ \delta_\xi F &= i\sqrt{2}\,\overline{\xi}\,\overline{\sigma}^m\partial_m\psi\end{aligned} \tag{3.10}$$

$$\mathscr{L}_0 = i\partial_n\overline{\psi}\,\overline{\sigma}^n\psi + A^*\Box A + F^*F \tag{3.11}$$

$$\mathscr{L}_m = AF + A^*F^* - \frac{1}{2}\psi\psi - \frac{1}{2}\overline{\psi}\,\overline{\psi} \tag{3.12}$$

演　　習

(1)　$\psi\chi = \chi\psi$，$\chi\sigma^n\overline{\psi} = -\overline{\psi}\,\overline{\sigma}^n\chi$，$(\chi\sigma^m\overline{\psi})^+ = \psi\sigma^m\overline{\chi}$，$(\chi\sigma^m\overline{\sigma}^n\psi)^+ = \overline{\psi}\overline{\sigma}^n\sigma^m\overline{\chi}$ を示せ．

(2)　フィルツ（Fierz）の並び替え公式（rearrangement formula）

$$(\psi\phi)\overline{\chi}_{\dot\beta} = -\frac{1}{2}(\phi\sigma^m\overline{\chi})(\psi\sigma^m)_{\dot\beta}$$

を証明せよ．

(3)　式 (3.5) と式 (3.6) を用いて次式を計算をせよ．

$$\delta_\eta \delta_\xi \psi_\alpha = -2i\eta\sigma^m\overline{\xi}\partial_m\psi_\alpha - i[\sigma^n\overline{\sigma}^m\partial_m\psi]_\alpha(\eta\sigma^n\overline{\xi}) + \sqrt{2}\,\xi_\alpha\delta_\eta F.$$

(4)　ラグランジアン (3.13) から補助場 F を消去して次を示せ．

$$\mathscr{L} = i\partial_n\overline{\psi}\,\overline{\sigma}^n\psi - \tfrac{1}{2}m(\psi\psi + \overline{\psi}\,\overline{\psi}) + A^*\Box A - m^2A^*A.$$

(5)　$\delta_\xi(AF - \frac{1}{2}\psi\psi) = i\sqrt{2}\,\overline{\xi}\overline{\sigma}^n\partial_n(A\psi)$ となることを示せ．

4. 超　場

超場は，超対称性の表現の美しい簡潔な記述を与える．それは，表現の加法・乗法を簡単にし，相互作用しているラグランジアンを構成するのに，非常に役に立つ．超場は，成分表現から常に構成されることを示す．成分場は，常に超場から級数展開によって回復される．

超対称代数が，反交換パラメーター（式 (3.2)）をもつリー代数とみられる視点から始めよう．これは，対応する群の元：

$$G(x,\theta,\overline{\theta}) = e^{i\{-x^m P_m + \theta Q + \overline{\theta}\,\overline{Q}\}} \tag{4.1}$$

を定義することを動機付ける．二つの群の元をハウスドルフ（Hausdorff）の公式 $e^A e^B = e^{A+B+(1/2)[A,B]+\cdots}$ を用いて乗ずるのは，より高次のすべての交換関係は消えるため，容易である．その結果，

$$G(0,\xi,\overline{\xi})G(x^m,\theta,\overline{\theta}) = G(x^m + i\theta\sigma^m\overline{\xi} - i\xi\sigma^m\overline{\theta}, \theta+\xi, \overline{\theta}+\overline{\xi}). \tag{4.2}$$

通常通りに，群の元の掛け算はパラメーター空間の運動を引き起こし，

$$g(\xi,\overline{\xi})\colon (x^m,\theta,\overline{\theta}) \to (x^m + i\theta\sigma^m\overline{\xi} - i\xi\sigma^m\overline{\theta}, \theta+\xi, \overline{\theta}+\overline{\xi}). \tag{4.3}$$

この運動は，微分演算子 Q と $\overline{Q}$：

$$\xi Q + \overline{\xi}\,\overline{Q} = \xi^\alpha\left(\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} - i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}{}^m\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial_m\right) + \overline{\xi}_{\dot{\alpha}}\left(\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}_{\dot{\alpha}}} - i\theta^\alpha\sigma_{\alpha\dot{\beta}}{}^m\varepsilon^{\dot{\beta}\dot{\alpha}}\partial_m\right) \tag{4.4}$$

によって引き起こされる．ここで，微分演算子に対して群の生成子に対してと同じ文字 Q，$\overline{Q}$ を使うのは，微分演算子が実際にパラメーター空間上で無限小の群作用：

$$\{Q_\alpha, \overline{Q}_{\dot\alpha}\} = 2i\sigma_{\alpha\dot\alpha}{}^m\partial_m$$
$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = \{\overline{Q}_{\dot\alpha}, \overline{Q}_{\dot\beta}\} = 0 \tag{4.5}$$

を表すからである．

しかし，ここで符号の変化，$P_m = -i\partial_m$ に注意せよ．これは連続する群の元の積は，掛け算の順序が逆の運動に対応するからである．例えば，$G(0,\xi_1,\overline{\xi}_1)G(0,\xi_2,\overline{\xi}_2)$ は運動 $g(\xi_2,\overline{\xi}_2)g(\xi_1,\overline{\xi}_1)$ を引き起こす．

われわれは，左積の代わりに右積を研究した．それから，微分演算子 D，$\overline{D}$

$$D_\alpha = \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} + i\sigma_{\alpha\dot\alpha}{}^m\overline{\theta}^{\dot\alpha}\partial_m$$
$$\overline{D}_{\dot\alpha} = -\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}^{\dot\alpha}} - i\theta^\alpha\sigma_{\alpha\dot\alpha}{}^m\partial_m \tag{4.6}$$

によって起こされる誘起運動（induced motion）を発見した．

それらの定義から D，$\overline{D}$ は次の反交換関係を満たす．

$$\{D_\alpha, \overline{D}_{\dot\alpha}\} = -2i\sigma_{\alpha\dot\alpha}{}^m\partial_m$$
$$\{D_\alpha, D_\beta\} = \{\overline{D}_{\dot\alpha}, \overline{D}_{\dot\beta}\} = 0. \tag{4.7}$$

一方，D と Q は反交換である．

$$\{D_\alpha, Q_\beta\} = \{D_\alpha, \overline{Q}_{\dot\beta}\} = \{\overline{D}_{\dot\alpha}, Q_\beta\} = \{\overline{D}_{\dot\alpha}, \overline{Q}_{\dot\beta}\} = 0. \tag{4.8}$$

いまやわれわれは，超場と超空間を導入する準備ができた．超空間の元は $z = (x,\theta,\overline{\theta})$ で表示される．超場は，超空間の関数で，θ と $\overline{\theta}$ のべき級数展開によって導入される．

$$F(x,\theta,\overline{\theta}) = f(x) + \theta\phi(x) + \overline{\theta}\,\overline{\chi}(x) + \theta\theta m(x) + \overline{\theta}\,\overline{\theta}n(x)$$
$$+ \theta\sigma^m\overline{\theta}v_m(x) + \theta\theta\overline{\theta}\,\overline{\lambda}(x) + \overline{\theta}\,\overline{\theta}\theta\psi(x) + \theta\theta\overline{\theta}\,\overline{\theta}d(x). \tag{4.9}$$

θ と $\overline{\theta}$ のすべてのより高次のべきは消える．超場に対する変換則は次のように定義される：

$$\delta_\xi F(x,\theta,\overline{\theta}) = \delta_\xi f(x) + \theta\delta_\xi\phi(x) + \overline{\theta}\delta_\xi\overline{\chi}(x)$$
$$+ \theta\theta\delta_\xi m(x) + \overline{\theta}\,\overline{\theta}\delta_\xi n(x) + \theta\sigma^m\overline{\theta}\delta_\xi v_m(x)$$
$$+ \theta\theta\overline{\theta}\delta_\xi\overline{\lambda}(x) + \overline{\theta}\,\overline{\theta}\theta\delta_\xi\psi(x) + \theta\theta\overline{\theta}\,\overline{\theta}\delta_\xi d(x)$$
$$\equiv (\xi Q + \overline{\xi}\,\overline{Q})F \tag{4.10}$$

ここで，Q，$\overline{Q}$ は微分演算子 (4.4) である．成分場（$f, \phi, \overline{\chi}, \ldots$）の変換則は θ と $\overline{\theta}$ のべきを一致させることによって式 (4.10) から見つかる．これらの変換の交換関係は式 (4.5) の結果として式 (3.4) を満たす．

超場の 1 次結合が再度超場であることは容易に証明できる．同様に，超場の積もまた超場である．なぜならば，Q，$\overline{Q}$ が線形微分演算子だからである．

このように，超場は超対称代数の線形表現を構成することがわかる．一般的に，しかし，表現は高度に可約である．余分な成分場を，$\overline{D}F = 0$，$F = F^{+}$ のような共変的拘束を挿入して消去してよい．超場は，超対称表現を見つける問題を，適切な拘束を見つける問題へ移す．われわれは，x–空間での微分方程式を通じて超場の x 依存性を制限することなく超場を縮小しなければならない．

条件 $\overline{D}\Phi = 0$ を満たす超場はカイラル超場，または，スカラー超場とよばれる．この拘束は x–空間での微分方程式を生じない．余分な条件は，しかし，しばしば微分方程式を与える．例えば，$DD\Phi = \overline{D}\Phi = 0$ は無質量場方程式を，一方，$D\Phi = \overline{D}\Phi = 0$ は，$\Phi = a =$ 定数を意味する．

ベクトル超場は $V = V^{+}$ を満たすとして定義される．ベクトルとスカラーの超場ですべての超対称的くり込み可能なラグランジアンを構築することができる．われわれは，ベクトル超場とスカラー超場を非常に詳細に次章で扱う．

成分多重項から超場を構築することは常に可能である．多重項の任意の成分（これを A とする）から出発し，作用が式 (3.3) で定義される演算子 $\exp(\theta Q + \overline{\theta}\,\overline{Q})$ を用いる．これは，x，θ，$\overline{\theta}$ の関数を生じ，それは超場

$$F(x, \theta, \overline{\theta}) = e^{(\theta Q + \overline{\theta}\,\overline{Q})} \times A = A + \delta_{\theta} A + \cdots \tag{4.11}$$

のように変換する．われわれは，関数 $\delta_{\xi} F(x, \theta, \overline{\theta})$ を，θ，$\overline{\theta}$ のべき級数でありその係数が変換された成分場を表す，と定義する．

$$\delta_{\xi} F(x, \theta, \overline{\theta}) = (\xi Q + \overline{\xi}\,\overline{Q}) \times F. \tag{4.12}$$

積 $\times$ は，式 (3.3) で定義される．それは成分場に作用し，パラメーター θ，$\overline{\theta}$ と可換である．ハウスドルフの公式から，

$$\begin{aligned}
\xi^{\alpha} \frac{\partial}{\partial \theta^{\alpha}} e^{(\theta Q + \overline{\theta}\,\overline{Q})} \times &= \xi^{\alpha} \frac{\partial}{\partial \theta^{\alpha}} e^{\theta Q} e^{\overline{\theta}\,\overline{Q}} e^{-\theta \sigma^{m} \overline{\theta} P_{m}} \times \\
&= (\xi Q - \xi \sigma^{m} \overline{\theta} P_{m}) \times e^{(\theta Q + \overline{\theta}\,\overline{Q})} \times
\end{aligned}$$

$$\overline{\xi}_{\dot{\alpha}}\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}_{\dot{\alpha}}}e^{(\theta Q+\overline{\theta}\,\overline{Q})}\times=(\overline{\xi}\,\overline{Q}+\theta\sigma^m\overline{\xi}P_m)\times e^{(\theta Q+\overline{\theta}\,\overline{Q})}\times. \tag{4.13}$$

これは，$\xi Q\times$ と $\overline{\xi}\,\overline{Q}\times$ の $\exp(\theta Q+\overline{\theta}\,\overline{Q})$ 上への作用が微分演算子 ξQ と $\overline{\xi}\,\overline{Q}$ によって表されることを示している：

$$\delta_\xi F(x,\theta,\overline{\theta})=(\xi Q+\overline{\xi}\,\overline{Q})F. \tag{4.14}$$

式 (4.10) と比較して，$F(x,\theta,\overline{\theta})=e^{(\theta Q+\overline{\theta}\,\overline{Q})}\times A$ が δ_ξ のもとで本当に超場として変換することがわかる.

その成分が，与えられた成分場の組に直接対応するような超場を得るためには，超場は最低次元の成分場から構築されなければならない．もし，複数個の最低次元の場がある場合は，各々がそれ自身の超場をつくるが，これらの超場は拘束方程式で関係付けられるであろう．われわれは，ゲージ場を議論するときこの問題に遭遇する.

文　献

A. Salam and J. Strathdee, Nucl. Phys. **B76**, 477 (1974).
S. Ferrara, J. Wess, and B. Zumino, Phys. Lett. **51B**, 239 (1974).

重要な式

$$Q_\alpha=\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}-i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}{}^m\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial_m$$
$$\overline{Q}_{\dot{\alpha}}=-\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}}+i\theta^\alpha\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}{}^m\partial_m \tag{4.4}$$

$$\{Q_\alpha,\overline{Q}_{\dot{\alpha}}\}=2i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}{}^m\partial_m$$
$$\{Q_\alpha,Q_\beta\}=\{\overline{Q}_{\dot{\alpha}},\overline{Q}_{\dot{\beta}}\}=0 \tag{4.5}$$

$$D_\alpha=\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}+i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}{}^m\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial_m$$
$$\overline{D}_{\dot{\alpha}}=-\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}}-i\theta^\alpha\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}{}^m\partial_m \tag{4.6}$$

$$\{D_\alpha,\overline{D}_{\dot{\alpha}}\}=-2i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}{}^m\partial_m$$
$$\{D_\alpha,D_\beta\}=\{\overline{D}_{\dot{\alpha}},\overline{D}_{\dot{\beta}}\}=0 \tag{4.7}$$

演　　習

(1)　次式を示せ．

$$\varepsilon^{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial\theta^\beta}=-\frac{\partial}{\partial\theta_\alpha}.$$

(2)　次の 2 式を証明せよ．

$$\varepsilon^{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}\frac{\partial}{\partial\theta^\beta}\theta\theta=4$$

$$\varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}_{\dot\alpha}}\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}_{\dot\beta}}\overline{\theta}\,\overline{\theta}=4.$$

(3)　ハウスドルフの公式を用いて証明せよ．

$$e^{i(\xi Q+\overline{\xi}\,\overline{Q})}e^{i\{-x^mP_m+\theta Q+\overline{\theta}\,\overline{Q}\}}=e^{i\{-P_m(x^m-i\xi\sigma^m\overline{\theta}+i\theta\sigma^m\overline{\xi})+(\theta+\xi)Q+(\overline{\theta}+\overline{\xi})\overline{Q}\}}.$$

(4)　与えられた式 $G(x'^m,\theta',\overline{\theta}')=G(0,\xi_2,0)G(0,0,\overline{\xi}_1)G(x^m,\theta,\overline{\theta})$ に対し，ハウスドルフの公式と式 (4 1) を用いて

$$x'^m=x^m+i\theta\sigma^m\overline{\xi}_1-i\xi_2\sigma^m(\overline{\theta}+\overline{\xi}_1)$$

$$\theta'=\theta+\xi_2$$

$$\overline{\theta}'=\overline{\theta}+\overline{\xi}_1$$

を示せ．これは誘起運動

$$g(0,\overline{\xi}_1)g(\xi_2,0)\colon(x^m,\theta,\overline{\theta})\to(x'^m,\theta',\overline{\theta}')$$

に対応することを示せ．ただし，g は式 (4.3) で定義される．

(5)　D，$\overline{D}$ の微分演算子としての定義を用いて $\{D_\alpha,\overline{D}_{\dot\alpha}\}$ を計算せよ．

(6)　$\overline{D}_{\dot\alpha}F(x,\theta,\overline{\theta})$ を計算せよ．$\overline{D}$ は式 (4.6) で，F は式 (4.9) で与えられる．$\overline{D}_{\dot\alpha}F=0$ は場の方程式ではなく，拘束を生じることに注目せよ．

(7)　式 $\overline{D}_{\dot\alpha}F=D_\alpha F=0$ が，$F=a=$ 定数，であることを示せ．式 $\overline{D}_{\dot\alpha}F=0$ と式 $D^\alpha D_\alpha F=4mF^+$ が F の成分に対する質量をもつ場の方程式を与えることを示せ．

(8)　最低次元が A ではなくて F である超場を構築せよ．これと超場式 $DD\Phi$ とを比較せよ．

5. カイラル超場

カイラル超場は条件

$$\overline{D}_{\dot{\alpha}}\Phi = 0 \tag{5.1}$$

で特徴付けられる．それらは第 3 章のカイラル多重項に対応する．

この拘束は，$y^m = x^m + i\theta\sigma^m\overline{\theta}$ と θ で簡単に解ける．なぜならば，

$$\overline{D}_{\dot{\alpha}}(x^m + i\theta\sigma^m\overline{\theta}) = 0, \qquad \overline{D}_{\dot{\alpha}}\theta = 0. \tag{5.2}$$

これらを変数とする任意の関数は式 (5.1) を満たす：

$$\begin{aligned}
\Phi &= A(y) + \sqrt{2}\,\theta\psi(y) + \theta\theta F(y) \\
&= A(x) + i\theta\sigma^m\overline{\theta}\partial_m A(x) + \frac{1}{4}\theta\theta\overline{\theta}\,\overline{\theta}\,\Box A(x) \\
&\quad + \sqrt{2}\,\theta\psi(x) - \frac{i}{\sqrt{2}}\,\theta\theta\partial_m\psi(x)\sigma^m\overline{\theta} + \theta\theta F(x).
\end{aligned} \tag{5.3}$$

これは，式 (5.1) の最も一般的な解である，それは，y，θ と $\overline{\theta}$ による D と $\overline{D}$ の表現：

$$\begin{aligned}
D_\alpha &= \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} + 2i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}{}^m\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}\frac{\partial}{\partial y^m} \\
\overline{D}_{\dot{\alpha}} &= -\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}}
\end{aligned} \tag{5.4}$$

からみてとれる．

超場 Φ^+ は拘束 $D_\alpha\Phi^+ = 0$ を満たす．Φ^+ は $y^{+m} = x^m - i\theta\sigma^m\overline{\theta}$ と，$\overline{\theta}$ の自然な関数である．そのべき級数展開は式 (5.3) の共役で得られる．

$$\begin{aligned}
\Phi^+ &= A^*(y^+) + \sqrt{2}\,\overline{\theta}\,\overline{\psi}(y^+) + \overline{\theta}\,\overline{\theta}F^*(y^+) \\
&= A^*(x) - i\theta\sigma^m\overline{\theta}\partial_m A^*(x) + \frac{1}{4}\theta\theta\overline{\theta}\,\overline{\theta}\,\Box A^*(x)
\end{aligned}$$

$$+\sqrt{2}\,\overline{\theta}\,\overline{\psi}(x)+\frac{i}{\sqrt{2}}\overline{\theta}\,\overline{\theta}\theta\sigma^m\partial_m\overline{\psi}(x)+\overline{\theta}\,\overline{\theta}F^*(x). \qquad \textbf{(5.5)}$$

D と $\overline{D}$ を y^+，θ，$\overline{\theta}$ で書くと，

$$\begin{aligned} D_\alpha &= \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} \\ \overline{D}_{\dot\alpha} &= -\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}^{\dot\alpha}}-2i\theta^\alpha\sigma_{\alpha\dot\alpha}{}^m\frac{\partial}{\partial y^{+m}} \end{aligned} \qquad (5.6)$$

で，式 (5.5) が $D_\alpha\Phi^+=0$ の最も一般的な解であることがわかる．

式 (4.10) を通じて導かれる A，ψ，F の変換則は，正確に成分場の多重項に対する変換則 (3.10) である．計算は，微分演算子 Q，$\overline{Q}$ を変数 y で表して行えば簡単である．

Φ，Φ^+ の最高次の成分はそれぞれ，F，F^* である．θ，$\overline{\theta}$ のより高次のすべては時空の微分である．したがって，スカラー超場の F，F^* 成分は常に時空微分に変換する．

カイラル超場 Φ_1，$\Phi_2,\cdots,\Phi_\ell$ の積は，再びカイラル超場であり，それらの共役についても同様である：

$$\begin{aligned} \Phi_i\Phi_j &= A_i(y)A_j(y)+\sqrt{2}\,\theta[\psi_i(y)A_j(y)+A_i(y)\psi_j(y)] \\ &\quad +\theta\theta[A_i(y)F_j(y)+A_j(y)F_i(y)-\psi_i(y)\psi_j(y)] \qquad \textbf{(5.7)} \\ \Phi_i\Phi_j\Phi_k &= A_i(y)A_j(y)A_k(y) \\ &\quad +\sqrt{2}\,\theta[\psi_iA_jA_k+\psi_jA_kA_i+\psi_kA_iA_j] \\ &\quad +\theta\theta[F_iA_jA_k+F_jA_kA_i+F_kA_iA_j \\ &\quad -\psi_i\psi_jA_k-\psi_j\psi_kA_i-\psi_k\psi_iA_j]. \qquad \textbf{(5.8)} \end{aligned}$$

しかし，積 $\Phi^+\Phi$ はカイラル超場ではない：

$$\begin{aligned} \Phi_i^+\Phi_j &= A_i^*(x)A_j(x)+\sqrt{2}\,\theta\psi_j(x)A_i^*(x) \\ &\quad +\sqrt{2}\,\overline{\theta}\,\overline{\psi}_i(x)A_j(x)+\theta\theta A_i^*(x)F_j(x)+\overline{\theta}\,\overline{\theta}F_i^*(x)A_j(x) \\ &\quad +\theta^\alpha\overline{\theta}^{\dot\alpha}[i\sigma_{\alpha\dot\alpha}{}^m(A_i^*\partial_mA_j-\partial_mA_i^*A_j)-2\overline{\psi}_{i\dot\alpha}\psi_{j\alpha}] \\ &\quad +\theta\theta\overline{\theta}^{\dot\alpha}\left[\frac{i}{\sqrt{2}}\sigma_{\alpha\dot\alpha}{}^m(A_i^*\partial_m\psi_j^\alpha-\partial_mA_i^*\psi_j^\alpha)-\sqrt{2}\,F_j\overline{\psi}_{i\dot\alpha}\right] \end{aligned}$$

$$+\bar\theta\bar\theta\theta^\alpha\left[-\frac{i}{\sqrt{2}}\sigma_{\alpha\dot\alpha}{}^m(\overline{\psi}_i^{\dot\alpha}\partial_m A_j-\partial_m\overline{\psi}_i^{\dot\alpha}A_j)+\sqrt{2}\,F_i^*\psi_{j\alpha}\right]$$

$$+\theta\theta\bar\theta\bar\theta\left[F_i^*F_j+\frac{1}{4}A_i^*\Box A_j+\frac{1}{4}\Box A_i^*A_j-\frac{1}{2}\partial_m A_i^*\partial^m A_j\right.$$

$$\left.+\frac{i}{2}\partial_m\overline{\psi}_i\,\bar\sigma^m\psi_j-\frac{i}{2}\,\overline{\psi}_i\,\bar\sigma^m\partial_m\psi_j\right]. \quad \mathbf{(5.9)}$$

この積の中で，$\theta\theta\bar\theta\bar\theta$ 成分は時空微分に変換する．

さて，カイラル超場だけを含む最も一般的な超対称的くり込み可能なラグランジアンを書く準備ができ，それは：

$$\mathscr{L}=\Phi_i^+\Phi_i|_{\theta\theta\bar\theta\bar\theta\ \text{成分}}+\left[\left(\frac{1}{2}m_{ij}\Phi_i\Phi_j\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{3}g_{ijk}\Phi_i\Phi_j\Phi_k+\lambda_i\Phi_i\right)\right|_{\theta\theta\ \text{成分}}+\text{h.c.}^{1)}\Big] \quad \mathbf{(5.10)}$$

である．結合 m_{ij}，g_{ijk} は添字に関して対称である．基底を x から y へ変更しても $\mathscr{L}$ を変えないことに注意せよ．

成分場では，$\mathscr{L}$ は

$$\mathscr{L}=i\partial_m\overline{\psi}_i\,\bar\sigma^m\psi_i+A_i^*\Box A_i+F_i^*F_i$$

$$+\left[m_{ij}\left(A_iF_j-\frac{1}{2}\psi_i\psi_j\right)\right.$$

$$\left.+g_{ijk}(A_iA_jF_k-\psi_i\psi_jA_k)+\lambda_iF_i+\text{h.c.}\right], \quad \mathbf{(5.11)}$$

ここで，すべての全微分を落とした．補助場 F_i はそのオイラー方程式：

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial F_k^*}=F_k+\lambda_k^*+m_{ik}^*A_i^*+g_{ijk}^*A_i^*A_j^*=0$$

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial F_k}=F_k^*+\lambda_k+m_{ik}A_i+g_{ijk}A_iA_j=0 \quad (5.12)$$

を使って消去できる．これは，$\mathscr{L}$ を力学的な場 A_i，ψ_i だけで与える：

$$\mathscr{L}=i\partial_m\overline{\psi}_i\,\bar\sigma^m\psi_i+A_i^*\Box A_i-\frac{1}{2}m_{ik}\psi_i\psi_k-\frac{1}{2}m_{ik}^*\psi_i\overline{\psi}_k$$

$$-g_{ijk}\psi_i\psi_jA_k-g_{ijk}^*\overline{\psi}_i\,\overline{\psi}_jA_k^*-\mathscr{V}(A_i,A_j^*). \quad (5.13)$$

---

1) （訳注）ここで h.c. はエルミート共役を表す．

式 (5.13) の中で，ポテンシャル $\mathscr{V}$ の形は

$$\mathscr{V} = F_k^* F_k. \tag{5.14}$$

ここで，F，F^* は式 (5.12) の解である．このポテンシャルは，超対称性の結果として，常にゼロ以上である．$F_k = 0$ である点がポテンシャルの絶対最小である．

定数はカイラル超場であることに注意せよ．なぜならば，$\Phi = a$ は，$\overline{D}_{\dot{\alpha}}\Phi = D_\alpha \Phi = 0$ の解である．したがって，任意の超対称的なラグランジアンからも，$\Phi_i \to \Phi_i + \alpha_i$ なるシフトによって，常に別のラグランジアンを得る．新しいラグランジアンがもつパラメーターは：

$$\begin{aligned} \lambda_i' &= \lambda_i + m_{ij} a_j + g_{ijk} a_j a_k \\ m_{ij}' &= m_{ij} + 2 g_{ijk} a_k \\ g_{ijk}' &= g_{ijk}. \end{aligned} \tag{5.15}$$

もし，古いポテンシャルが，$\Phi_i = -a_i$ で最小ならば，新しいポテンシャルは原点で最小である．新しいポテンシャルは，式 (5.15) で与えられるパラメーターをもつ超対称的ラグランジアンのものである．

くり込み可能なラグランジアンの仲間は，R–不変性によって限定されるかもしれない．R は，次のようにカイラル多重項に作用する：

$$\begin{aligned} \mathrm{R}\Phi(\theta, x) &= e^{2\imath n\alpha} \Phi(e^{-\imath\alpha}\theta, x) \\ \mathrm{R}\Phi^+(\overline{\theta}, x) &= e^{-2in\alpha} \Phi^+(e^{i\alpha}\overline{\theta}, x). \end{aligned} \tag{5.16}$$

ここで，n は超場の R–特性とよばれる．成分場に対しては，式 (5.16) は

$$\begin{aligned} \mathrm{R}\colon A &\to e^{2in\alpha} A \\ \psi &\to e^{2i(n-\frac{1}{2})\alpha} \psi \\ F &\to e^{2i(n-1)\alpha} F \end{aligned} \tag{5.17}$$

を意味する．

質量項，または，ポテンシャルが R–不変なのは，それぞれの超場の R–特性の合計が 1 のときに限る．

文　献

J Wess and B Zumino, Phys. Lett **49B**, 52 (1974)
L. O'Raifeartaigh, Nucl. Phys. **B96**, 331 (1975).

重要な式

$$\overline{D}_{\dot\alpha}\Phi = 0 \tag{5.1}$$

$$\begin{aligned}\Phi &= A(x) + i\theta\sigma^m\overline{\theta}\partial_m A(x) + \frac{1}{4}\theta\theta\overline{\theta}\,\overline{\theta}\,\Box A(x)\\ &\quad + \sqrt{2}\,\theta\psi(x) - \frac{i}{\sqrt{2}}\theta\theta\partial_m\psi(x)\sigma^m\overline{\theta} + \theta\theta F(x)\end{aligned} \tag{5.3}$$

$$\begin{aligned}\Phi^+ &= A^*(x) - i\theta\sigma^m\overline{\theta}\partial_m A^*(x) + \frac{1}{4}\theta\theta\overline{\theta}\,\overline{\theta}\,\Box A^*(x)\\ &\quad + \sqrt{2}\,\overline{\theta}\,\overline{\psi}(x) + \frac{i}{\sqrt{2}}\overline{\theta}\,\overline{\theta}\theta\sigma^m\partial_m\overline{\psi}(x) + \overline{\theta}\,\overline{\theta}F^*(x)\end{aligned} \tag{5.5}$$

$$\begin{aligned}\Phi_i\Phi_j &= A_i(y)A_j(y) + \sqrt{2}\,\theta[\psi_i(y)A_j(y) + A_i(y)\psi_j(y)]\\ &\quad + \theta\theta[A_i(y)F_j(y) + A_j(y)F_i(y) - \psi_i(y)\psi_j(y)]\end{aligned} \tag{5.7}$$

$$\begin{aligned}\Phi_i\Phi_j\Phi_k &= A_i(y)A_j(y)A_k(y)\\ &\quad + \sqrt{2}\,\theta[\psi_i A_j A_k + \psi_j A_k A_i + \psi_k A_i A_j]\\ &\quad + \theta\theta[F_i A_j A_k + F_j A_k A_i + F_k A_i A_j\\ &\quad - \psi_i\psi_j A_k - \psi_j\psi_k A_i - \psi_k\psi_i A_j]\end{aligned} \tag{5.8}$$

$$\begin{aligned}\Phi_i^+\Phi_j &= A_i^*(x)A_j(x) + \sqrt{2}\,\theta\psi_j(x)A_i^*(x)\\ &\quad + \sqrt{2}\,\overline{\theta}\,\overline{\psi}_i(x)A_j(x) + \theta\theta A_i^*(x)F_j(x) + \overline{\theta}\,\overline{\theta}F_i^*(x)A_j(x)\\ &\quad + \theta^\alpha\overline{\theta}^{\dot\alpha}[i\sigma_{\alpha\dot\alpha}{}^m(A_i^*\partial_m A_j - \partial_m A_i^* A_j) - 2\overline{\psi}_{i\alpha}\psi_{j\alpha}]\\ &\quad + \theta\theta\overline{\theta}^{\dot\alpha}\left[\frac{i}{\sqrt{2}}\sigma_{\alpha\dot\alpha}{}^m(A_i^*\partial_m\psi_j^\alpha - \partial_m A_i^*\psi_j^\alpha) - \sqrt{2}\,F_j\overline{\psi}_{i\dot\alpha}\right]\\ &\quad + \overline{\theta}\,\overline{\theta}\theta^\alpha\left[-\frac{i}{\sqrt{2}}\sigma_{\alpha\dot\alpha}{}^m(\overline{\psi}_i^{\dot\alpha}\partial_m A_j - \partial_m\overline{\psi}_i^{\dot\alpha}A_j) + \sqrt{2}\,F_i^*\psi_{j\alpha}\right]\\ &\quad + \theta\theta\overline{\theta}\,\overline{\theta}\Bigg[F_i^*F_j + \frac{1}{4}A_i^*\Box A_j + \frac{1}{4}\Box A_i^* A_j\end{aligned}$$

$$-\frac{1}{2}\partial_m A_i^* \partial^m A_j + \frac{i}{2}\partial_m \overline{\psi}_i \overline{\sigma}^m \psi_j - \frac{i}{2}\overline{\psi}_i \overline{\sigma}^m \partial_m \psi_j \Big] \tag{5.9}$$

$$\mathscr{L} = \Phi_i^+ \Phi_i \big|_{\theta\theta\overline{\theta}\overline{\theta}\ \text{成分}} + \Big[\Big(\frac{1}{2} m_{ij} \Phi_i \Phi_j + \frac{1}{3} g_{ijk} \Phi_i \Phi_j \Phi_k + \lambda_i \Phi_i \Big) \Big|_{\theta\theta\ \text{成分}} + \text{h.c.} \Big] \tag{5.10}$$

$$\mathscr{L} = i\partial_m \overline{\psi}_i \overline{\sigma}^m \psi_i + A_i^* \Box A_i + F_i^* F_i + \Big[m_{ij} \Big(A_i F_j - \frac{1}{2}\psi_i \psi_j \Big) + g_{ijk}(A_i A_j F_k - \psi_i \psi_j A_k) + \lambda_i F_i + \text{h.c.} \Big] \tag{5.11}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{R}\Phi(\theta, x) &= e^{2in\alpha}\Phi(e^{-i\alpha}\theta, x) \\ \mathrm{R}\Phi^+(\overline{\theta}, x) &= e^{-2in\alpha}\Phi^+(e^{i\alpha}\overline{\theta}, x) \end{aligned} \tag{5.16}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{R}\colon A &\to e^{2in\alpha} A \\ \psi &\to e^{2i(n-\frac{1}{2})\alpha} \psi \\ F &\to e^{2i(n-1)\alpha} F \end{aligned} \tag{5.17}$$

演　　習

(1)　Q_α と $\overline{Q}_{\dot\alpha}$ を y_m，θ，$\overline{\theta}$ を用いて計算せよ．

$$Q_\alpha = \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha}$$
$$\overline{Q}_{\dot\alpha} = -\frac{\partial}{\partial \overline{\theta}^{\dot\alpha}} + 2i\theta^\alpha \sigma_{\alpha\dot\alpha}{}^m \frac{\partial}{\partial y^m}.$$

(2)　D_α，$\overline{D}_{\dot\alpha}$，$Q_\alpha$，$\overline{Q}_{\dot\alpha}$ を y^{+m}，θ，$\overline{\theta}$ を用いて計算せよ．

(3)　変数 y^m，θ，$\overline{\theta}$ で表された式 (5.3) と Q，$\overline{Q}$ を使って変換則 (3.10) を導け．

(4)　カイラル超場（$\overline{D}_{\dot\alpha}\Phi = 0$）の成分を次のように定義する．

$$\mathscr{A} = \Phi|_{\theta=\overline{\theta}=0}$$
$$\Psi_\alpha = D_\alpha \Phi|_{\theta=\overline{\theta}=0}$$
$$\mathscr{F} = DD\Phi|_{\theta=\overline{\theta}=0}.$$

これらの成分を，式 (5.3) の成分場 A，ψ，F で表せ．$\mathscr{A}$，Ψ，$\mathscr{F}$ に対する変換則

を，次の形で表される Q と $\overline{Q}$ を使って計算せよ．

$$
\begin{aligned}
Q_\alpha &= D_\alpha - 2i\sigma_{\alpha\dot\alpha}{}^m\bar\theta^{\dot\alpha}\frac{\partial}{\partial x^m} \\
\overline{Q}_{\dot\alpha} &= \overline{D}_{\dot\alpha} + 2i\theta^\alpha\sigma_{\alpha\dot\alpha}{}^m\frac{\partial}{\partial x^m}.
\end{aligned}
$$

(5)　任意の超場 U に対して $\Phi = \overline{D}\,\overline{D}U$ がカイラルであることを示せ．U の成分を Φ の成分に関係付けよ．

(6)　単独の超場 Φ に対する質量項 $(1/2)m\Phi\Phi$ は，Φ が R–特性 1/2 のときにかぎり R–不変であることを示せ．この条件が，ラグランジアンから 1 次，3 次の項を除外することに注意せよ．

6. ベクトル超場

ベクトル超場は次の条件を満たす．

$$V = V^{+}. \tag{6.1}$$

いつものように，それらは θ と $\bar{\theta}$ のべき級数展開によって理解されるべきである：

$$\begin{aligned} V(x,\theta,\bar{\theta}) = {} & C(x) + i\theta\chi(x) - i\bar{\theta}\,\bar{\chi}(x) \\ & + \frac{i}{2}\theta\theta[M(x)+iN(x)] - \frac{i}{2}\,\bar{\theta}\,\bar{\theta}[M(x)-iN(x)] \\ & - \theta\sigma^{m}\bar{\theta}v_{m}(x) + i\theta\theta\bar{\theta}\left[\bar{\lambda}(x) + \frac{i}{2}\,\bar{\sigma}^{m}\partial_{m}\chi(x)\right] \\ & - i\bar{\theta}\,\bar{\theta}\theta\left[\lambda(x) + \frac{i}{2}\sigma^{m}\partial_{m}\bar{\chi}(x)\right] + \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\,\bar{\theta}\left[D(x) + \frac{1}{2}\Box C(x)\right]. \end{aligned} \tag{6.2}$$

成分場 C，D，M，N と v_m は，式 (6.2) が式 (6.1) を満たすので，すべて実数でなければならない．ベクトル場 v_m が多重項総体の名前を与えている．われわれは，ベクトル超場 V の $\theta\theta\bar{\theta}$，$\bar{\theta}\,\bar{\theta}\theta$ と $\theta\theta\bar{\theta}\,\bar{\theta}$ 成分の係数として場の非常に特殊な組合せを選択した．この選択は，エルミート場 $\Phi + \Phi^{+}$（ここで Φ，Φ^{+} はカイラル場）によって指示される：

$$\begin{aligned} \Phi + \Phi^{+} = {} & A + A^{*} + \sqrt{2}(\theta\psi + \bar{\theta}\,\bar{\psi}) + \theta\theta F + \bar{\theta}\,\bar{\theta}F^{*} \\ & + i\theta\sigma^{m}\bar{\theta}\partial_{m}(A - A^{*}) + \frac{i}{\sqrt{2}}\,\theta\theta\bar{\theta}\,\bar{\sigma}^{m}\partial_{m}\psi \\ & + \frac{i}{\sqrt{2}}\,\bar{\theta}\,\bar{\theta}\theta\sigma^{m}\partial_{m}\bar{\psi} + \frac{1}{4}\,\theta\theta\bar{\theta}\,\bar{\theta}\Box(A + A^{*}). \end{aligned} \tag{6.3}$$

この組合せは $\theta\sigma^{m}\bar{\theta}$ の係数としてグラディエント $i\partial_{m}(A - A^{*})$ をもっているので，ゲージ変換の超対称的一般化の定義として次の形を示唆する：

$$V \to V + \Phi + \Phi^{+}. \tag{6.4}$$

この変換のもとで,

$$\begin{aligned} C &\to C + A + A^{*} \\ \chi &\to \chi - i\sqrt{2}\,\psi \\ M + iN &\to M + iN - 2iF \\ v_m &\to v_m - i\partial_m(A - A^{*}) \\ \lambda &\to \lambda \\ D &\to D. \end{aligned} \tag{6.5}$$

式 (6.2) 中の成分の選択が, λ と D をゲージ不変にしている.

式 (6.5) から C, χ, M, N のすべてがゼロである特殊なゲージ[1)]が存在することがわかる. このゲージを固定すると超対称性は破れるが, 通常のゲージ対称性 $v_m \to v_m + \partial_m a$ は依然残る. このゲージでは V のべき級数が非常に簡単に計算でき：

$$\begin{aligned} V &= -\theta\sigma^m\overline{\theta}v_m(x) + i\theta\theta\overline{\theta}\,\overline{\lambda}(x) - i\overline{\theta}\,\overline{\theta}\theta\lambda(x) + \frac{1}{2}\,\theta\theta\overline{\theta}\,\overline{\theta}D(x) \\ V^2 &= -\frac{1}{2}\,\theta\theta\overline{\theta}\,\overline{\theta}v_m v^m \\ V^3 &= 0. \end{aligned} \tag{6.6}$$

このようにわれわれは, ベクトル場 V を, ヤン–ミルズ・ポテンシャルの超対称的一般化とみることができるかもしれない. 対応する超対称的場の強さを構成するために, われわれは, λ_α と $\overline{\lambda}_\alpha$ が V の中で最低次元のゲージ不変な成分場であることに注目する. それらはまた,

$$\begin{aligned} W_\alpha &= -\frac{1}{4}\,\overline{D}\,\overline{D}D_\alpha V \\ \overline{W}_{\dot\alpha} &= -\frac{1}{4}\,DD\overline{D}_{\dot\alpha}V \end{aligned} \tag{6.7}$$

の最低次元成分場でもある.

---

1) (訳注) ヴェス–ズミノ　ゲージ, WZ ゲージとよばれる.

これらの超場は，カイラルでゲージ不変である．カイラル性

$$\overline{D}_{\dot\beta} W_\alpha = 0 \qquad D_\beta \overline{W}_{\dot\alpha} = 0 \tag{6.8}$$

は式 (6.7) からただちにわかるが，ゲージ不変性：

$$W_\alpha \to -\frac{1}{4}\overline{D}\,\overline{D} D_\alpha (V + \Phi + \Phi^+) = W_\alpha - \frac{1}{4}\overline{D}\{\overline{D}, D_\alpha\}\Phi = W_\alpha \tag{6.9}$$

を示すには $\overline{D}\Phi = D\Phi^+ = 0$ を使わなければならない．

特殊なゲージ (6.6) で W_α の成分を計算するのは容易である．変数 $y = x + i\theta\sigma\overline{\theta}$, $y^+ = x - i\theta\sigma\overline{\theta}$ を使うとさらに簡単化され：

$$\begin{aligned} V &= -\theta\sigma^m\overline{\theta} v_m(y) + i\theta\theta\overline{\theta}\,\overline{\lambda}(y) - i\overline{\theta}\,\overline{\theta}\theta\lambda(y) \\ &\quad + \frac{1}{2}\,\theta\theta\overline{\theta}\,\overline{\theta}[D(y) - i\partial_m v^m(y)] \\ &= -\theta\sigma^m\overline{\theta} v_m(y^+) - i\overline{\theta}\,\overline{\theta}\theta\lambda(y^+) + i\theta\theta\overline{\theta}\,\overline{\lambda}(y^+) \\ &\quad + \frac{1}{2}\,\theta\theta\overline{\theta}\,\overline{\theta}[D(y^+) + i\partial_m v^m(y^+)]. \end{aligned} \tag{6.10}$$

その結果は，

$$\begin{aligned} W_\alpha &= -i\lambda_\alpha(y) + \left[\delta_\alpha{}^\beta D(y) - \frac{i}{2}(\sigma^m\overline{\sigma}^n)_\alpha{}^\beta(\partial_m v_n(y) - \partial_n v_m(y))\right]\theta_\beta \\ &\quad + \theta\theta\sigma_{\alpha\dot\alpha}{}^m\partial_m\overline{\lambda}^{\dot\alpha}(y) \\ \overline{W}_{\dot\alpha} &= i\overline{\lambda}_{\dot\alpha}(y^+) + \left[\varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta} D(y^+) + \frac{i}{2}\varepsilon_{\dot\alpha\dot\gamma}(\overline{\sigma}^m\sigma^n)^{\dot\gamma}{}_{\dot\beta}(\partial_m v_n(y^+) - \partial_n v_m(y^+))\right]\overline{\theta}^{\dot\beta} \\ &\quad - \varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\overline{\theta}\,\overline{\theta}\,\overline{\sigma}^{m\dot\beta\alpha}\partial_m\lambda_\alpha(y^+). \end{aligned} \tag{6.11}$$

超場 W_α，$\overline{W}_{\dot\alpha}$ は，ゲージ不変な場 D，λ_α，$v_{mn} = \partial_m v_n - \partial_n v_m$ だけを含んでいる．さらに，これらはカイラルで，次の付加的拘束式を満たす．

$$D^\alpha W_\alpha = \overline{D}_{\dot\alpha}\overline{W}^{\dot\alpha}. \tag{6.12}$$

$\theta = \overline{\theta} = 0$ に対して，この関係は D が実関数であることを簡単に表現する．式 (6.12) は式 (6.11) から成分ごとに，あるいは，定義 (6.7) から直接に証明される．式 (6.11)

がカイラル性条件 (6.8) と拘束 (6.12) の最も一般的な解であることが示せるかもしれない．

超場 W_α と $\overline{W}_{\dot\alpha}$ は，成分場 λ_α，$\overline{\lambda}_{\dot\alpha}$ を最低次元の場としてもつ表現の例である．第 4 章で議論したように，λ_α，$\overline{\lambda}_{\dot\alpha}$ から演算子 $\exp(\theta Q+\overline{\theta}\,\overline{Q})\times$ を応用して W_α と $\overline{W}_{\dot\alpha}$ を構成できたかもしれない．そのとき W_α と $\overline{W}_{\dot\alpha}$ が式 (6.12) で関係付けられることを発見するであろう．

W_α はカイラルなので，$W^\alpha W_\alpha$ の $\theta\theta$ 成分

$$W^\alpha W_\alpha|_{\theta\theta}=-2i\lambda\sigma^m\partial_m\overline{\lambda}-\frac{1}{2}v^{mn}v_{mn}+D^2+\frac{i}{4}v^{mn}v^{\ell k}\varepsilon_{mn\ell k} \tag{6.13}$$

は空間微分として変換する．$W^\alpha W_\alpha$ は次のようにも書いてもよいことに注意せよ．

$$W^\alpha W_\alpha=-\frac{1}{4}\overline{D}\,\overline{D}W^\alpha D_\alpha V. \tag{6.14}$$

式 (6.13) から，

$$\mathscr{L}=\frac{1}{4}(W^\alpha W_\alpha|_{\theta\theta}+\overline{W}_\alpha\overline{W}^{\dot\alpha}|_{\overline{\theta}\,\overline{\theta}}) \tag{6.15}$$

が自由ベクトル場のラグランジアンの超対称ゲージ不変な一般化であることがわかる．部分積分の後，次の形に帰着する．

$$\int d^4x\,\mathscr{L}=\int d^4x\left\{\frac{1}{2}D^2-\frac{1}{4}v^{mn}v_{mn}-i\lambda\sigma^m\partial_m\overline{\lambda}\right\}. \tag{6.16}$$

このラグランジアンは $\theta\theta\overline{\theta}\,\overline{\theta}$ 成分：

$$\int d^4x\,\mathscr{L}=\int d^4x\,\frac{1}{4}\{W^\alpha D_\alpha V+\overline{W}_{\dot\alpha}\overline{D}^{\dot\alpha}V\}\Big|_{\theta\theta\overline{\theta}\,\overline{\theta}} \tag{6.17}$$

として求めてもよい．式 (6.14) と $\overline{D}$ と $\partial/\partial\overline{\theta}$ は x–空間の微分だけ異なっていることとから，式 (6.17) と式 (6.15) は等価である．

ラグランジアン (6.17) には質量項 m^2V^2 を常に加えてよい．この項は，ゲージ不変でなく，WZ ゲージでは計算できない．式 (6.2) から出発して

$$V^2|_{\theta\theta\overline{\theta}\,\overline{\theta}}=-\frac{1}{2}v_mv^m-\chi\lambda-\overline{\chi}\,\overline{\lambda}+\frac{1}{2}(M^2+N^2)$$

$$-\frac{i}{2}\chi\sigma^m\partial_m\overline{\chi}-\frac{i}{2}\,\overline{\chi}\,\overline{\sigma}^m\partial_m\chi$$
$$+\frac{1}{2}C\Box C+CD. \tag{6.18}$$

この項は，ベクトル場 v_m に質量を与えるだけでなく，有質量多重項に必要な付加的な自由度 $C,\ \chi$ をも導入していることは興味深い．ラグランジアン (6.17) と式 (6.18) が合わさって，質量の等しい 1 個のベクトル場，2 個のスピン–1/2 場，1 個のスカラー場を記述する．

文　　献

A. Salam and B. Strathdee, Phys. Rev. **D11**, 1521 (1975).
J Wess, Acta Physica Austriaca, Suppl. **XV**, 475 (1976).

重 要 な 式

$$V=V^+ \tag{6.1}$$

$$\begin{aligned}V(x,\theta,\overline{\theta})=&\ C(x)+i\theta\chi(x)-i\overline{\theta}\,\overline{\chi}(x)\\&+\frac{i}{2}\theta\theta[M(x)+iN(x)]-\frac{i}{2}\,\overline{\theta}\,\overline{\theta}[M(x)-iN(x)]\\&-\theta\sigma^m\overline{\theta}v_m(x)+i\theta\theta\overline{\theta}\left[\overline{\lambda}(x)+\frac{i}{2}\,\overline{\sigma}^m\partial_m\chi(x)\right]\\&-i\overline{\theta}\,\overline{\theta}\theta\left[\lambda(x)+\frac{i}{2}\sigma^m\partial_m\overline{\chi}(x)\right]+\frac{1}{2}\theta\theta\overline{\theta}\,\overline{\theta}\left[D(x)+\frac{1}{2}\Box C(x)\right]\end{aligned} \tag{6.2}$$

$$V\to V+\Phi+\Phi^+ \tag{6.4}$$

$$\begin{aligned}C&\to C+A+A^*\\ \chi&\to\chi-i\sqrt{2}\,\psi\\ M+iN&\to M+iN-2iF\\ v_m&\to v_m-i\partial_m(A-A^*)\\ \lambda&\to\lambda\\ D&\to D\end{aligned} \tag{6.5}$$

$$W_\alpha = -\frac{1}{4}\,\overline{D}\,\overline{D}D_\alpha V$$
$$\overline{W}_{\dot\alpha} = -\frac{1}{4}\,DD\overline{D}_{\dot\alpha}V \tag{6.7}$$

$$\overline{D}_{\dot\beta}W_\alpha = 0$$
$$D_\beta\overline{W}_{\dot\alpha} = 0 \tag{6.8}$$

$$\begin{aligned} W_\alpha &= -i\lambda_\alpha(y) + \left[\delta_\alpha{}^\beta D(y) - \frac{i}{2}(\sigma^m\overline{\sigma}^n)_\alpha{}^\beta(\partial_m v_n(y) - \partial_n v_m(y))\right]\theta_\beta \\ &\quad +\theta\theta\sigma_{\alpha\dot\alpha}{}^m\partial_m\overline{\lambda}^{\dot\alpha}(y) \\ \overline{W}_{\dot\alpha} &= i\overline{\lambda}_{\dot\alpha}(y^+) + \left[\varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta}D(y^+) + \frac{i}{2}\varepsilon_{\dot\alpha\dot\gamma}(\overline{\sigma}^m\sigma^n)^{\dot\gamma}{}_{\dot\beta}(\partial_m v_n(y^+) - \partial_n v_m(y^+))\right]\overline{\theta}^{\dot\beta} \\ &\quad -\varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\overline{\theta}\,\overline{\theta}\,\overline{\sigma}^{m\dot\beta\alpha}\partial_m\lambda_\alpha(y^+) \end{aligned} \tag{6.11}$$

$$D^\alpha W_\alpha = \overline{D}_{\dot\alpha}\overline{W}^{\dot\alpha} \tag{6.12}$$

$$W^\alpha W_\alpha|_{\theta\theta} = -2i\lambda\sigma^m\partial_m\overline{\lambda} - \frac{1}{2}v^{mn}v_{mn} + D^2 + \frac{i}{4}v^{mn}v^{\ell k}\varepsilon_{mn\ell k} \tag{6.13}$$

$$\mathscr{L} = \frac{1}{4}(W^\alpha W_\alpha|_{\theta\theta} + \overline{W}_{\dot\alpha}\overline{W}^{\dot\alpha}|_{\overline{\theta}\,\overline{\theta}}) \tag{6.15}$$

$$\int d^4x\,\mathscr{L} = \int d^4x\left\{\frac{1}{2}D^2 - \frac{1}{4}v^{mn}v_{mn} - i\lambda\sigma^m\partial_m\overline{\lambda}\right\} \tag{6.16}$$

演　　習

(1) 式

$$\begin{aligned} [\overline{D}_{\dot\alpha}, \{\overline{D}_{\dot\beta}, D_\gamma\}] &= 0 \\ \left[D_\alpha, \overline{D}_{\dot\beta}\overline{D}^{\dot\beta}\right] &= -4i\sigma_{\alpha\dot\beta}{}^m\partial_m\overline{D}^{\dot\beta} \\ \frac{1}{8}\left[D^2, \overline{D}^2\right] &= -iD^\alpha\sigma_{\alpha\dot\alpha}{}^n\overline{D}^{\dot\alpha}\partial_n - 2\Box \\ &= i\overline{D}^{\dot\alpha}\sigma_{\alpha\dot\alpha}{}^n D^\alpha\partial_n + 2\Box \end{aligned}$$

を証明せよ．

(2)　$D_\alpha V$ の $\overline{\theta}\,\overline{\theta}$ 成分を，一般的なゲージ (6.2) と特殊なゲージ (6.6) で計算せよ．

(3)　e^V を WZ ゲージで計算せよ．

(4)　拘束 (6.8) と式 (6.12) が成分場に対し，次式を与えることを示せ．

$$D = D^*$$
$$v^{mn} = v^{*mn}$$
$$\varepsilon^{m\ell kn}\partial_\ell v_{kn} = 0.$$

(5)　計算せよ．

$$DD\theta\theta = -4e^{-i\theta\sigma^m\overline{\theta}\,(\partial/\partial x^m)}$$
$$\overline{D}\,\overline{D}\,\overline{\theta}\,\overline{\theta} = -4e^{i\theta\sigma^m\overline{\theta}\,(\partial/\partial x^m)}.$$

(6)　W_α と $\overline{W}_{\dot\alpha}$ の定義を使って式 (6.12) を示せ．

(7)　ラグランジアン (6.17) + 式 (6.18) に対してオイラー–ラグランジュの方程式を導け．

(8)　式 (6.13) を使って，次を示せ．

$$\int d^4x\,\frac{1}{4}(W^\alpha W_\alpha|_{\theta\theta} + \overline{W}_{\dot\alpha}\overline{W}^{\dot\alpha}|_{\overline{\theta}\,\overline{\theta}}) = \frac{1}{2}\int d^4x\,W^\alpha W_\alpha|_{\theta\theta}.$$

(9)　ベクトル多重項中のゲージ不変な場の超対称変換

$$\delta_\xi v_{mn} = i[(\xi\sigma^n\partial_m\overline{\lambda} + \overline{\xi}\,\overline{\sigma}^n\partial_m\lambda) - (n \leftrightarrow m)]$$
$$\delta_\xi\lambda = i\xi D + \sigma^{mn}\xi v_{mn}$$
$$\delta_\xi D = \overline{\xi}\,\overline{\sigma}^m\partial_m\lambda - \xi\sigma^m\partial_m\overline{\lambda}$$

を導け．

7. ゲージ不変な相互作用

本章ではカイラル多重項とベクトル多重項のゲージ不変な相互作用を議論する．U(1) の場合から出発し，その後，ノンアーベリアンゲージ群に一般化する．

カイラル超場 Φ_ℓ は，大域的 U(1) ゲージ変換のもとで位相の変換をする．

$$\Phi'_\ell = e^{-it_\ell \lambda}\Phi_\ell. \tag{7.1}$$

t_ℓ は Φ_ℓ の適当な U(1) 電荷で，λ は大域的 U(1) 回転角である．t_ℓ，λ は，実数の定数である．定数はカイラル超場で，拘束方程式 $D_\alpha\lambda = \overline{D}_{\dot\alpha}\lambda = 0$ を満たす．式 (7.1) から，Φ'_ℓ も同様に超場であることが容易にわかる．定数パラメーター λ に対して式 (7.1) のもとで不変なラグランジアンをつくることは容易で：

$$\begin{aligned}
\mathscr{L} &= \mathscr{L}_{K.E.} + \mathscr{L}_{P.E.} \\
\mathscr{L}_{K.E.} &= \Phi_\ell^+\Phi_\ell\big|_{\theta\theta\overline{\theta}\,\overline{\theta}} \\
\mathscr{L}_{P.E.} &= \left[\frac{1}{2}m_{ij}\Phi_i\Phi_j + \frac{1}{3}g_{ijk}\Phi_i\Phi_j\Phi_k\right]\bigg|_{\dot\theta\theta} + \text{h.c.}
\end{aligned} \tag{7.2}$$

U(1) 不変性は，t_i+t_j または $t_i+t_j+t_k \neq 0$ でないときは常に，m_{ij} または $g_{ijk}=0$ を要求する．文中で，項 $\mathscr{L}_{P.E.}$ はしばしば，超ポテンシャルとよばれる．

式 (7.1) は，λ が定数カイラル場のときにカイラル場を別のカイラル場に変換する．λ が x に依存するとき事情はもう少し複雑になる．この場合には，λ は完全なカイラル多重項に格上げされなければならない：

$$\begin{aligned}
\Phi'_\ell &= e^{-it\ell\Lambda}\Phi_\ell, & \overline{D}_{\dot\alpha}\Lambda &= 0 \\
\Phi'^+_\ell &= e^{it\ell\Lambda^+}\Phi_\ell{}^+, & D_\alpha\Lambda^+ &= 0.
\end{aligned} \tag{7.3}$$

このときにかぎり Φ'_ℓ は，カイラル超場のままである．

ラグランジアン (7.2) はこのような局所的変換に対して不変ではない．特に，$\mathscr{L}_{P.E.}$ は不変であるが，$\mathscr{L}_{K.E.}$ はそうではない：

$$\Phi_\ell'^{+}\Phi_\ell' = \Phi_\ell^{+}\Phi_\ell e^{it_\ell(\Lambda^+ - \Lambda)}. \tag{7.4}$$

変換則 (6.4)：

$$V' = V + i(\Lambda - \Lambda^+) \tag{7.5}$$

をもつベクトル超場 V を導入することで，$\mathscr{L}_{K.E.}$ が不変になるかもしれないことが容易にわかる．これを加えて，完全なラグランジアン

$$\begin{aligned}\mathscr{L} = &\frac{1}{4}(W^\alpha W_\alpha|_{\bar\theta\bar\theta} + \overline{W}_{\dot\alpha}\overline{W}^{\dot\alpha}|_{\bar\theta\bar\theta}) + \Phi_\ell^+ e^{t_\ell V}\Phi_\ell|_{\theta\theta\bar\theta\bar\theta}\\ &+ \left[\left(\frac{1}{2}m_{ij}\Phi_i\Phi_j + \frac{1}{3}g_{ijk}\Phi_i\Phi_j\Phi_k\right)\Big|_{\theta\theta} + \text{h.c.}\right]\end{aligned} \tag{7.6}$$

は局所的 U(1) ゲージ変換に対して不変になる．

一見，式 (7.6) はくり込み不可能にみえる．しかし，$V^3 = 0$ であるヴェス–ズミノ（WZ）ゲージで評価でき：

$$\begin{aligned}\Phi^+ e^{tV}\Phi|_{\theta\theta\bar\theta\bar\theta} = &FF^* + A\Box A^* + i\partial_n\overline{\psi}\,\overline{\sigma}^n\psi\\ &+ tv^n\left(\frac{1}{2}\overline{\psi}\,\overline{\sigma}^n\psi + \frac{i}{2}A^*\partial_n A - \frac{i}{2}\partial_n A^* A\right)\\ &- \frac{i}{\sqrt{2}}t(A\overline{\lambda}\,\overline{\psi} - A^*\lambda\psi) + \frac{1}{2}\left(tD - \frac{1}{2}t^2 v_n v^n\right)A^*A.\end{aligned} \tag{7.7}$$

このゲージでは，ラグランジアンは 4 より高い次元の項を含んでいない．

電気力学の超対称的な拡張は，二つのカイラル超場：

$$\Phi_+' = e^{-ie\Lambda}\Phi_+, \qquad \Phi_-' = e^{ie\Lambda}\Phi_- \tag{7.8}$$

によって構築される．成分場では，ラグランジアン

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{QED} = &\frac{1}{4}(WW|_{\theta\theta} + \overline{W}\,\overline{W}|_{\bar\theta\bar\theta}) + \Phi_+^+ e^{eV}\Phi_+|_{\theta\theta\bar\theta\bar\theta} + \Phi_-^+ e^{-eV}\Phi_-|_{\theta\theta\bar\theta\bar\theta}\\ &+ m(\Phi_+\Phi_-|_{\theta\theta} + \Phi_+^+\Phi_-^+|_{\bar\theta\bar\theta})\end{aligned} \tag{7.9}$$

は

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}_{QED} = &\frac{1}{2}D^2 - \frac{1}{4}v_{mn}v^{mn} - i\lambda\sigma^n\partial_n\overline{\lambda} \\
&+ F_+F_+^* + F_-F_-^* + A_+^*\Box A_+ + A_-^*\Box A_- \\
&+ i(\partial_n\overline{\psi}_+\overline{\sigma}^n\psi_+ + \partial_n\overline{\psi}_-\overline{\sigma}^n\psi_-) + ev^n\Big[\frac{1}{2}\overline{\psi}_+\overline{\sigma}^n\psi_+ - \frac{1}{2}\overline{\psi}_-\overline{\sigma}^n\psi_- \\
&+ \frac{i}{2}A_+^*\partial_nA_+ - \frac{i}{2}\partial_nA_+^*A_+ - \frac{i}{2}A_-^*\partial_nA_- + \frac{i}{2}\partial_nA_-^*A_-\Big] \\
&- \frac{ie}{\sqrt{2}}(A_+\overline{\psi}_+\overline{\lambda} - A_+^*\psi_+\lambda - A_-\overline{\psi}_-\overline{\lambda} + A_-^*\psi_-\lambda) \\
&+ \frac{e}{2}D[A_+^*A_+ - A_-^*A_-] - \frac{1}{4}e^2v_nv^n(A_+^*A_+ + A_-^*A_-) \\
&+ m[A_+F_- + A_-F_+ - \psi_+\psi_- - \overline{\psi}_+\overline{\psi}_- + A_+^*F_-^* + A_-^*F_+^*]
\end{aligned}
\tag{7.10}
$$

となる．式 (7.10) から，二つのワイル・スピノル ψ_+，ψ_- が質量をもつディラック・スピノル，電子を構成することがわかる．

変換則 (7.1) をノンアーベリアンコンパクト群に一般化でき：

$$\Phi' = e^{-i\Lambda}\Phi, \qquad \Phi'^+ = \Phi^+e^{i\Lambda^+}. \tag{7.11}$$

式 (7.11) で，Λ は行列

$$\Lambda_{ij} = T_{ij}^a\Lambda_a \tag{7.12}$$

である．行列 T^a はカイラル場 Φ で定義される表現におけるゲージ群のエルミート生成子である．随伴表現で，われわれは次のように規格化する：

$$\mathrm{Tr}\, T^aT^b = k\delta^{ab}, \qquad k > 0. \tag{7.13}$$

この表記（規約）では，構造定数 t^{abc}

$$[T^a, T^b] = it^{abc}T^c \tag{7.14}$$

は完全反対称である．

変換則 (7.5)：

$$e^{V'} = e^{-i\Lambda^+}e^Ve^{i\Lambda} \tag{7.15}$$

を拡張すれば，ラグランジアン (7.6) はノンアーベリアンゲージ変換のもとで不変である．式 (7.15) で Λ と V はともに行列：

$$\Lambda_{ij} = T^a_{ij}\Lambda_a, \qquad V_{ij} = T^a_{ij}V_a \tag{7.16}$$

である．

ハウスドルフの公式で，式 (7.15) の e の積の計算では群の生成子の交換関係だけに直面する．群の交換関係 (7.14) によって交換関係を評価すると V' は次の形に表せる．

$$V' = T^a V'_a. \tag{7.17}$$

これは変換則 (7.15) が生成子 T^a のいかなる特定な表現にも依存しないことを示している．さらに，変換則は V に独立な項から始まり，

$$V' = V + i(\Lambda - \Lambda^+) + \cdot\ \cdot\ . \tag{7.18}$$

したがって，ノンアーベリアン理論も $V^3 = 0$ なる WZ ゲージを許容する．

式 (7.15) は，その無限小ゲージ変換に対して次の形のハウスドルフの公式：

$$e^A e^B = e^{A + \mathscr{L}_{A/2}\cdot[B + \coth(\mathscr{L}_{A/2})\cdot B] + \cdots} \tag{7.19}$$

を使って評価してよい．この表示は B に関して線形なすべての項を含む．そのリー微分 $\mathscr{L}_{A/2}$ は $[(1/2)A, B]$ で与えられる．式 (7.19) の双曲余接 (hyperbolic cotangent) は級数展開で理解でき，そこでは因子 $(1/2)A$ を n 個含み，

$$c_n(\mathscr{L}_{A/2})^n \cdot B \equiv c_n\left[\frac{A}{2}, \left[\frac{A}{2}, \left[\ldots, \left[\frac{A}{2}, B\right]\cdots\right]\right]\right]. \tag{7.20}$$

式 (7.19) を使って式 (7.15) を評価すると

$$\delta V = V' - V = i\mathscr{L}_{V/2}\quad [(\Lambda + \Lambda^+) + \coth(\mathscr{L}_{V/2})\cdot(\Lambda - \Lambda^+)]. \tag{7.21}$$

超対称場の強さ W^α（式 (6.7)）は容易にノンアーベリアンの場合に一般化でき：

$$W_\alpha = -\frac{1}{4}\overline{D}\,\overline{D}e^{-V}D_\alpha e^V. \tag{7.22}$$

式 (7.22) で，ベクトル超場 V は行列で，式 (7.16) と同様にゲージ群の随伴表現の生成子である．ノンアーベリアンゲージ変換のもとで

$$W_\alpha \to W'_\alpha = e^{-i\Lambda} W_\alpha e^{i\Lambda} \tag{7.23}$$

は容易に証明できる．この証明は読者への演習問題として残す．

いまや，スカラー場，スピノル場，ベクトル場の超対称くり込み可能な相互作用の最も一般的なラグランジアンを書き下す準備ができ：

$$\begin{aligned}\mathscr{L} = &\frac{1}{16kg^2}\,\mathrm{Tr}(W^\alpha W_\alpha|_{\theta\theta} + \overline{W}_{\dot\alpha}\overline{W}^{\dot\alpha}|_{\overline{\theta}\,\overline{\theta}}) + \Phi^+ e^V \Phi|_{\theta\theta\overline{\theta}\,\overline{\theta}}\\ &+ \left[\left(\frac{1}{2}m_{ij}\Phi_i\Phi_j + \frac{1}{3}g_{ijk}\Phi_i\Phi_j\Phi_k\right)\Big|_{\theta\theta} + \mathrm{h.c.}\right].\end{aligned} \tag{7.24}$$

ゲージ不変性から質量行列 m_{ij} 結合定数 g_{ijk} は内部対称群に関して完全対称な不変テンソルである．ゲージ場の運動項の規格化は，スケーリング $V \to 2gV$ で成分の作用が正準規格化を回復するように選ばれている（演習 (7) 参照）．

文　　献

J. Wess and B. Zumino, Nucl. Phys. **B78**, 1 (1974).
S. Ferrara and B. Zumino, Nul. Phys. **B79**, 413 (1974).

重 要 な 式

$$\begin{aligned}\Phi'_\ell &= e^{-it\ell\Lambda}\Phi_\ell, &\qquad \overline{D}_{\dot\alpha}\Lambda &= 0\\ \Phi'^{+}_\ell &= e^{it\ell\Lambda^+}\Phi_\ell{}^+, &\qquad D_\alpha\Lambda^+ &= 0\end{aligned} \tag{7.3}$$

$$V' = V + i(\Lambda - \Lambda^+) \tag{7.5}$$

$$\begin{aligned}\mathscr{L} = &\frac{1}{4}(W^\alpha W_\alpha|_{\theta\theta} + \overline{W}_{\dot\alpha}\overline{W}^{\dot\alpha}|_{\overline{\theta}\,\overline{\theta}}) + \Phi^+_\ell e^{t_\ell V}\Phi_\ell|_{\theta\theta\overline{\theta}\,\overline{\theta}}\\ &+ \left[\left(\frac{1}{2}m_{ij}\Phi_i\Phi_j + \frac{1}{3}g_{ijk}\Phi_i\Phi_j\Phi_k\right)\Big|_{\theta\theta} + \mathrm{h.c.}\right]\end{aligned} \tag{7.6}$$

$$\begin{aligned}\Phi^+ e^{tV}\Phi|_{\theta\theta\overline{\theta}\,\overline{\theta}} = &FF^* + A\Box A^* + i\partial_n\overline{\psi}\,\overline{\sigma}^n\psi\\ &+ tv^n\left(\frac{1}{2}\,\overline{\psi}\,\overline{\sigma}^n\psi + \frac{i}{2}A^*\partial_n A - \frac{i}{2}\partial_n A^* A\right)\\ &- \frac{i}{\sqrt{2}}\,t(A\overline{\lambda}\,\overline{\psi} - A^*\lambda\psi) + \frac{1}{2}\left(tD - \frac{1}{2}t^2 v_n v^n\right)A^*A\end{aligned} \tag{7.7}$$

$$\mathscr{L}_{QED} = \frac{1}{4}(WW|_{\theta\theta} + \overline{W}\,\overline{W}|_{\overline{\theta}\,\overline{\theta}}) + \Phi_+^+ e^{eV}\Phi_+|_{\theta\theta\overline{\theta}\,\overline{\theta}} + \Phi_-^+ e^{-eV}\Phi_-|_{\theta\theta\overline{\theta}\,\overline{\theta}}$$
$$+ m(\Phi_+\Phi_-|_{\theta\theta} + \Phi_+^+\Phi_-^+|_{\overline{\theta}\,\overline{\theta}}) \tag{7.9}$$

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{QED} = {} & \frac{1}{2}D^2 - \frac{1}{4}v_{mn}v^{mn} - i\lambda\sigma^n\partial_n\overline{\lambda} \\ & + F_+F_+^* + F_-F_-^* + A_+^*\Box A_+ + A_-^*\Box A_- \\ & + i(\partial_n\overline{\psi}_+\overline{\sigma}^n\psi_+ + \partial_n\overline{\psi}_-\overline{\sigma}^n\psi_-) + ev^n\Bigg[\frac{1}{2}\,\overline{\psi}_+\overline{\sigma}^n\psi_+ - \frac{1}{2}\,\overline{\psi}_-\overline{\sigma}^n\psi_- \\ & + \frac{i}{2}A_+^*\partial_n A_+ - \frac{i}{2}\partial_n A_+^* A_+ - \frac{i}{2}A_-^*\partial_n A_- + \frac{i}{2}\partial_n A_-^* A_-\Bigg] \\ & - \frac{ie}{\sqrt{2}}(A_+\overline{\psi}_+\overline{\lambda} - A_+^*\psi_+\lambda - A_-\overline{\psi}_-\overline{\lambda} + A_-^*\psi_-\lambda) \\ & + \frac{e}{2}D[A_+^*A_+ - A_-^*A_-] - \frac{1}{4}e^2 v_n v^n(A_+^*A_+ + A_-^*A_-) \\ & + m[A_+F_- + A_-F_+ - \psi_+\psi_- - \overline{\psi}_+\overline{\psi}_- + A_+^*F_-^* + A_-^*F_+^*]\end{aligned} \tag{7.10}$$

$$\mathrm{Tr}\,T^aT^b = k\delta^{ab}, \qquad k > 0 \tag{7.13}$$

$$[T^a, T^b] = it^{abc}T^c \tag{7.14}$$

$$e^{V'} = e^{-i\Lambda^+}e^V e^{i\Lambda} \tag{7.15}$$

$$\Lambda_{ij} = T_{ij}^a\Lambda_a, \qquad V_{ij} = T_{ij}^a V_a \tag{7.16}$$

$$W_\alpha = -\frac{1}{4}\,\overline{D}\,\overline{D}e^{-V}D_\alpha e^V \tag{7.22}$$

$$W_\alpha \to W'_\alpha = e^{-i\Lambda}W_\alpha e^{i\Lambda} \tag{7.23}$$

$$\mathscr{L} = \frac{1}{16kg^2}\,\mathrm{Tr}(W^\alpha W_\alpha|_{\theta\theta} + \overline{W}_{\dot{\alpha}}\overline{W}^{\dot{\alpha}}|_{\overline{\theta}\,\overline{\theta}}) + \Phi^+e^V\Phi|_{\theta\theta\overline{\theta}\,\overline{\theta}}$$
$$+ \left[\left(\frac{1}{2}m_{ij}\Phi_i\Phi_j + \frac{1}{3}g_{ijk}\Phi_i\Phi_j\Phi_k\right)\Bigg|_{\theta\theta} + \text{h.c.}\right] \tag{7.24}$$

演　　習

(1)　式 (7.6) と式 (7.24) の $\mathscr{L}_{P.E}$ が，複素パラメーターの対称変換 (7.11) に対しても不変であることを示せ．

(2)　特殊なゲージ (6.6) では $e^{-V}D_\alpha e^V = D_\alpha V - [V, D_\alpha V]/2$ であることを示せ．

(3)　$W'_\alpha = e^{-i\Lambda}W_\alpha e^{i\Lambda}$ を示せ．$D_\alpha \Lambda^+ = 0$ と $\overline{D}_{\dot\alpha}\Lambda = 0$ を使え．

$$\begin{aligned}
W'_\alpha &= -\frac{1}{4}\overline{D}\,\overline{D}[e^{-i\Lambda}e^{-V}e^{i\Lambda^+}D_\alpha e^{-i\Lambda^+}e^V e^{i\Lambda}] \\
&= e^{-i\Lambda}W_\alpha e^{i\Lambda} - \frac{1}{4}e^{-i\Lambda}\overline{D}\{\overline{D}, D_\alpha\}e^{i\Lambda} \\
&= e^{-i\Lambda}W_\alpha e^{i\Lambda}.
\end{aligned}$$

(4)　三つのカイラルベクトル場 $\Phi^A{}_\ell$ を用いて SO(3) 不変な相互作用をつくれ．

(5)　パウリ $\boldsymbol{\sigma}$–行列の積のふるまい $(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})(\mathbf{m}\cdot\boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{n}\cdot\mathbf{m} + i(\mathbf{n}\times\mathbf{m})\cdot\boldsymbol{\sigma}$ を使って，b の無限小値に対する次式を示せ．

$$\begin{aligned}
e^{ia\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}}e^{ib\mathbf{m}\cdot\boldsymbol{\sigma}} &= (\cos a + i\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}\sin a)(1 + ib\mathbf{m}\cdot\boldsymbol{\sigma}) \\
&= \cos[a + (\mathbf{n}\cdot\mathbf{m})b] + i\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{\sigma}\sin[a + (\mathbf{n}\cdot\mathbf{m})b].
\end{aligned}$$

ここで，$\boldsymbol{\mu} = \mathbf{n} + b[(\mathbf{m} - (\mathbf{n}\cdot\mathbf{m})\mathbf{n})\cot a - \mathbf{n}\times\mathbf{m}]$ で $\mathbf{n}$，$\mathbf{m}$ は単位ベクトルである．

(6)　演習 (5) と $[\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{m}\cdot\boldsymbol{\sigma}] = 2i(\mathbf{n}\times\mathbf{m})\cdot\boldsymbol{\sigma}$ を使って，特殊な場合 $e^{ia\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}}e^{ib\mathbf{m}\cdot\boldsymbol{\sigma}}$ について式 (7.19) を証明せよ．b は無限小である．

(7)　WZ ゲージで

$$\mathscr{L} = \frac{1}{16kg^2}\,\mathrm{Tr}(W^\alpha W_\alpha|_{\theta\theta} + \overline{W}_{\dot\alpha}\overline{W}^{\dot\alpha}|_{\bar\theta\bar\theta}) + \Phi^+ e^V \Phi|_{\theta\theta\bar\theta\bar\theta}$$

を展開せよ．ゲージ群はノンアーベリアンとし，リスケーリング $V \to 2gV$ で結合 g を回復せよ．

$$\begin{aligned}
\mathscr{L} = &-\frac{1}{4}v^{(a)}_{mn}v^{(a)}_{mn} - i\overline{\lambda}^{(a)}\,\overline{\sigma}^m\mathscr{D}_m\lambda^{(a)} + \frac{1}{2}D^{(a)}D^{(a)} - \mathscr{D}_m A^+\mathscr{D}_m A \\
&- i\overline{\psi}\,\overline{\sigma}^m\mathscr{D}_m\psi + F^+F + i\sqrt{2}\,g(A^+T^{(a)}\psi\lambda^{(a)} - \overline{\lambda}^{(a)}T^{(a)}A\overline{\psi}) \\
&+ gD^{(a)}A^+T^{(a)}A.
\end{aligned}$$

ここで，

$$\mathscr{D}_m A = \partial_m A + igv_m^{(a)} T^{(a)} A$$
$$\mathscr{D}_m \psi = \partial_m \psi + igv_m^{(a)} T^{(a)} \psi$$
$$\mathscr{D}_m \lambda^{(a)} = \partial_m \lambda^{(a)} - gt^{abc} v_m^{(b)} \lambda^{(c)}$$
$$v_{mn}^{(a)} = \partial_m v_n^{(a)} - \partial_n v_m^{(a)} - gt^{abc} v_m^{(b)} v_n^{(c)}$$

である．

(8)　WZ ゲージで，A，ψ，F，$v_m^{(a)}$，$\lambda^{(a)}$ に対する変換則を計算せよ．それらを使って演習 (7) の結果が超対称的であることを証明せよ．

$$\delta_\xi A = \sqrt{2}\,\xi\psi$$
$$\delta_\xi \psi = i\sqrt{2}\,\sigma^m \bar{\xi} \mathscr{D}_m A + \sqrt{2}\,\xi F$$
$$\delta_\xi F = i\sqrt{2}\,\bar{\xi}\,\bar{\sigma}^m \mathscr{D}_m \psi + i\,2gT^{(a)} A\bar{\xi}\,\bar{\lambda}^{(a)}$$
$$\delta_\xi v_m^{(a)} = -i\bar{\lambda}^{(a)}\,\bar{\sigma}^m \xi + i\bar{\xi}\,\bar{\sigma}^m \lambda^{(a)}$$
$$\delta_\xi \lambda^{(a)} = \sigma^{mn} \xi v_{mn}^{(a)} + i\xi D^{(a)}$$
$$\delta_\xi D^{(a)} = -\xi\sigma^m \mathscr{D}_m \bar{\lambda}^{(a)} - \mathscr{D}_m \lambda^{(a)} \sigma^m \bar{\xi}.$$

8. 自発的対称性の破れ

もし超対称ゲージ理論が高エネルギー物理で現実的な応用が見つかるとすれば，超対称性とゲージ対称性はともに自発的に破れなければならない．通常のゲージ対称性の自発的破れはよく理解されているが，超対称性は付加的な条件をもち込むのでさらに議論が必要である．

これらの制限は，超対称代数 (I) から導かれる性質

$$H = \frac{1}{4}(\overline{Q}_1 Q_1 + Q_1 \overline{Q}_1 + \overline{Q}_2 Q_2 + Q_2 \overline{Q}_2) \tag{8.1}$$

による．式 (8.1) は，すべての各状態 $|\Psi\rangle$ に対して $\langle\Psi|H|\Psi\rangle \geqq 0$ であることを伝えている．さらに，ゼロエネルギー密度の状態が理論の超対称的基底状態であることを示している．そのような状態は，H の期待値が負ではないことから基底状態であり；$\langle\Psi|H|\Psi\rangle = 0$ が $Q|0\rangle = \overline{Q}|0\rangle = 0$ を意味するからそれらは超対称である．ゼロエネルギーの基底状態は超対称性を保つが，一方，正エネルギーの基底状態は自発的に超対称性を破る．図 8.1 にこの事情を図示している．

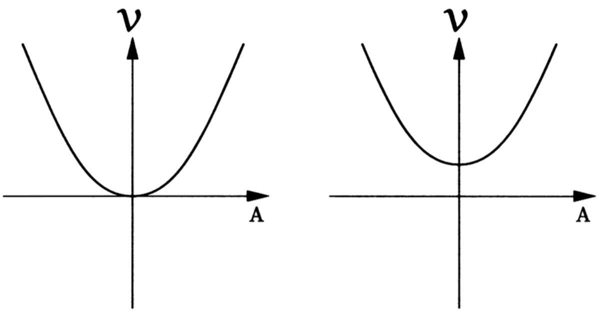
本章で，われわれは超対称性理論における自発的対称性の破れの一般的ふるまいを示す三つの模型を議論する．最初に，カイラル超場から構成され，基底状態が超対称性を破る超対称模型を考える．式 (5.14) からこのような模型ではポテンシャルエネルギーは $\mathscr{V} = F_k{}^* F_k$ の形になり，F_k は次で与えられる．

$$F_k{}^* = -(\lambda_k + m_{ik} A_i + g_{ijk} A_i A_j). \tag{8.2}$$

$F_k = 0$ に対する A_i の真空期待値 a_i が，ポテンシャルの超対称的最小のシグナルである．超対称性を破るために，われわれは，方程式

$$0 = \lambda_k + m_{ik} a_i + g_{ijk} a_i a_j \tag{8.3}$$

が a_i に対して解をもたないように，パラメーター λ_k，m_{ik}，g_{ijk} に対して特別な値を選ばなければならない．このような模型は，第 5 章の終わりに引用した論文中



(a)　　(b)

図 8.1　(a) の基底状態は，超対称性を保有し，(b) の基底状態は超対称性を自発的に破る．

でオラファティ（O'Raifeartaigh）によって構築された．彼は，超対称性を破るには三つのカイラル超場が必要であること，最も簡単な模型は

$$\mathscr{L}_{P.E.} = \{[\lambda\Phi_0 + m\Phi_1\Phi_2 + g\Phi_0\Phi_1\Phi_1] + \text{h.c.}\} \tag{8.4}$$

で与えられることを発見した．

ファイエ（Fayet）とイリオポロス（Iliopoulos）は，アーベリアンゲージ群をもつゲージ理論における超対称性の自発的破り方を示した．彼らは，ベクトル超場の $\theta\theta\overline{\theta}\,\overline{\theta}$ 成分が超対称不変でゲージ不変であることに気付いた．彼らはこの項をラグランジアン (7.9) に加えると，超対称性が自発的に破れることを発見した：

$$\begin{aligned}\mathscr{L} = &\frac{1}{4}(W^\alpha W_\alpha + \overline{W}_{\dot\alpha}\overline{W}^{\dot\alpha}) + \Phi_1^+ e^{eV}\Phi_1 + \Phi_2^+ e^{-eV}\Phi_2 \\ &+ m(\Phi_1\Phi_2 + \Phi_1^+\Phi_2^+) + 2\kappa V.\end{aligned} \tag{8.5}$$

この模型では，ポテンシャルは

$$\mathscr{V} = \frac{1}{2}D^2 + F_1F_1^* + F_2F_2^* \tag{8.6}$$

で与えられ，D，F_1，F_2 はオイラー方程式

$$D + \kappa + \frac{e}{2}(A_1^*A_1 - A_2^*A_2) = 0$$

$$F_1 + mA_2^* = 0 \tag{8.7}$$
$$F_2 + mA_1^* = 0$$

の解である．$\mathscr{V} = 0$ にする (8.7) には解がない，したがって，超対称性は自発的に破れている．

より詳細にポテンシャル (8.6) を調べよう．補助場に対して代入することによりポテンシャル $\mathscr{V}$ は，

$$\mathscr{V} = \frac{1}{2}\kappa^2 + \left(m^2 + \frac{1}{2}e\kappa\right)A_1^* A_1 + \left(m^2 - \frac{1}{2}e\kappa\right)A_2^* A_2 \\ + \frac{1}{8}e^2(A_1^* A_1 - A_2^* A_2)^2 \tag{8.8}$$

となる．われわれは $m^2 > \kappa e/2$ と $m^2 < \kappa e/2$ の二つの場合を区別しなければならない．

$m^2 > \kappa e/2$ のときは A_1，A_2 はともに実数の質量をもつ．模型は，一方が質量 ${m_1}^2 = m^2 + \kappa e/2$，他方が ${m_2}^2 = m^2 - \kappa e/2$ である二つの複素数のスカラー場，三つのスピノル場，ψ_1，ψ_2，λ，と一つのベクトル場 v_m を記述している．スピノル場とベクトル場の質量は，対称性の破れでは変化しない．特に，ψ_i は質量 m のまま，λ と v_m はゼロ質量のままである．${m_1}^2 + {m_2}^2 = 2m^2$ であることに注意せよ．ベクトル場 v_m は，破れていない U(1) 対称性のゲージ場の役割をし，λ は自発的に破れた超対称性から生じるゴールドストン・フェルミオンである．λ の変換則から（演習 (6.9)）

$$\delta_\xi \lambda = i\xi D + \sigma^{mn}\xi v_{mn}. \tag{8.9}$$

D が真空期待値をもてば λ は非斉次に変換することがわかる：

$$\delta_\xi \lambda = -i\xi\kappa + \cdots . \tag{8.10}$$

これが，λ をゴールドストン・フェルミオンと同定する．補助場のノンゼロ真空期待値が超対称性の自発的破れを誘起する．

$m^2 < \kappa e/2$ のときには，$A_1 = A_2 = 0$ はポテンシャルを最小にしない．最小を見つけるには次の方程式を解かなければならない．

$$\frac{\partial \mathscr{V}}{\partial A_1^*} = \left(m^2 + \frac{1}{2}e\kappa\right)A_1 + \frac{e^2}{4}(A_1^* A_1 - A_2^* A_2)A_1 = 0$$
$$\frac{\partial \mathscr{V}}{\partial A_2^*} = \left(m^2 - \frac{1}{2}e\kappa\right)A_2 - \frac{e^2}{4}(A_1^* A_1 - A_2^* A_2)A_2 = 0. \tag{8.11}$$

これは，$A_1 = 0$，$A_2 = \nu$，$e^2\nu^2/4 + (m^2 - e\kappa/2) = 0$ に最小値を与える．ゲージ変換で ν は実数に選べる．ポテンシャルをその最小値のまわりで展開すると U(1) 対称性が自発的に破れる．$A = A_1$，$\tilde{A} = A_2 - \nu$ とすると，ポテンシャルは：

$$\mathscr{V} = \frac{2m^2}{e^2}(e\kappa - m^2) + 2m^2 A^* A + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}e^2\nu^2\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}[\tilde{A} + \tilde{A}^*]\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}e^2\nu^2\right)v_m v^m + \cdots \tag{8.12}$$

となる．定数

$$2m^2(e\kappa - m^2)/e^2$$

は正なので，超対称性とゲージ対称性の両方が自発的に破れている．ベクトル場 v_m はゴールドストン場 $(\tilde{A} - \tilde{A}^*)/\sqrt{2}$ を食べて質量を獲得し，自由度の総数は変わらない．その対称性の破れはスピノルの質量項も変更する：

$$-m(\psi_1\psi_2 + \overline{\psi}_1\overline{\psi}_2) + \frac{ie\nu}{\sqrt{2}}(\overline{\psi}_2\overline{\lambda} - \psi_2\lambda). \tag{8.13}$$

次の線形結合

$$\psi = \psi_2$$
$$\tilde{\psi} = \frac{1}{\sqrt{m^2 + \frac{1}{2}e^2\nu^2}}\left(m\psi_1 + \frac{ie\nu}{\sqrt{2}}\lambda\right)$$
$$\tilde{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{m^2 + \frac{1}{2}e^2\nu^2}}\left(m\lambda + \frac{ie\nu}{\sqrt{2}}\psi_1\right) \tag{8.14}$$

で質量項は対角化される：

$$-\sqrt{m^2 + \frac{1}{2}e^2\nu^2}(\psi\tilde{\psi} + \overline{\psi}\overline{\tilde{\psi}}). \tag{8.15}$$

ゴールドストン場 $\tilde{\lambda}$ はゼロ質量のままである．ゴールドストン場に対して期待されるように，$\tilde{\lambda}$ は非斉次に変換することに注意せよ．

$$\delta_\xi \tilde{\lambda} = -2i\,\frac{m}{e}\,\xi\sqrt{e\kappa - m^2} + \cdots. \tag{8.16}$$

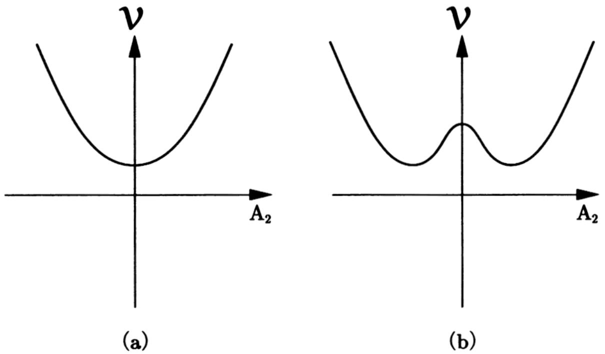


図 8.2 (a) $m^2 > e\kappa/2$ のとき，超対称性のみが破れる．(b) $m^2 < e\kappa/2$ のとき，ゲージ対称性と超対称性の両方が破れる．

この模型は，質量が $\sqrt{m^2 + e^2 v^2/2}$ の 2 個のスピノル場，質量が各々 $\sqrt{e^2 v^2/2}$ であるベクトル場とスカラー場，質量が $\sqrt{2m^2}$ の 1 個の複素スカラー場，1 個のゼロ質量ゴールドストン・スピノル場を記述している．質量の 2 乗に自由度の数を乗じたものの総和が，ボソン状態とフェルミオン状態では同一であることに注意せよ．

$$2 \cdot 2m^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} e^2 v^2 = 4\left(m^2 + \frac{1}{2} e^2 v^2\right). \tag{8.17}$$

これは，前述の U(1) 対称な場合にも正しい．実際に，フェルミオンの質量とボソンの質量との間のこのような関係は超対称性理論に共通である．

ファイエ–イリエポロス模型の事情が，図 8.2 に描かれている．補助場のゼロでない真空期待値が超対称性の破れを誘起する一方，力学的スカラー場のゼロでない真空期待値はゲージ対称性を破る．

われわれは超対称性とゲージ対称性が自発的に破れている模型をみたので，ゲージ対称性だけが破れる模型を構成したくなる．われわれは，最初にカイラル超場でこのような模型を議論する．この場合，われわれは式 (8.3) の解 a_i で内部対称群のもとで不変にとどまらないものを発見しなければならない．簡単な例として，われわれは，中性，正，負，各 1 個の三つのカイラル超場で U(1) 群を考える．ラグランジアン

$$\mathscr{L}_{P.E.} = \frac{1}{2} m\Phi^2 + \mu\Phi_+\Phi_- + \lambda\Phi + g\Phi\Phi_+\Phi_- + \text{h.c.} \tag{8.18}$$

は U(1) 不変である．方程式 (8.3) は

$$\begin{aligned} \lambda + ma + ga_+ a_- &= 0 \\ a_-(\mu + ga) &= 0 \\ a_+(\mu + ga) &= 0. \end{aligned} \tag{8.19}$$

この方程式系は二つの解をもつ：

$$\begin{aligned} &(1) \quad a_+ = a_- = 0, \qquad a = -\frac{\lambda}{m} \\ &(2) \quad a_+ a_- = -\frac{1}{g}\left(\lambda - \frac{m\mu}{g}\right), \qquad a = -\frac{\mu}{g}. \end{aligned} \tag{8.20}$$

最初の解は U(1) 対称性を破らないが，2 番目の解は破る．2 番目の解では，積 a_+a_- だけが決まる．これは，$\mathscr{L}_{P.E.}$ が U(1) 群だけでなくその複素拡張に対しても不変であることに起因する．式 (8.19) のいかなる解 a_+，a_- に対しても，任意の複素数 λ に対し，解の全クラス $e^{\lambda}a_+$，$e^{-\lambda}a_-$ が存在する．基底状態は，初期の対称群で必要とされるよりも大きな縮退を有している．

もし，ラグランジアン (8.18) をゲージ化するならば，式 (8.5) のように Φ_+，Φ_- に結合するベクトル超場 V を導入しなければならない．これは，スカラー場 $A_\pm$ とベクトル多重項 V の次のような 3 次線形結合：

$$eV(A_+^* A_+ - A_-^* A_-) \tag{8.21}$$

となる．対称性を破る解に対しては，これは D 項に次の寄与をする．

$$eV\left[a_+^* a_+ - a_-^* a_- + 2\frac{\kappa}{e}\right]. \tag{8.22}$$

このような項は通常対称性を破る．しかし，縮退 $a_\pm \to e^{\pm\lambda}a_\pm$ のために，κ をどのように選んでもこの項は変換で消し去ることができる．この模型では，D 項は超対称性の自発的破れを誘起しない．

式 (8.20) が関係する質量項は，

$$\frac{1}{2}\, e^2(a_+^* a_+ + a_-^* a_-)V^2. \tag{8.23}$$

これは，変換では消去されない．これが，ベクトル場 v_m に質量を与える．質量 (6.18) と式 (8.23) を比べると，超対称性理論における自発的ゲージ対称性の破れは，全

体が質量をもつベクトル多重項を与えることがわかる．これが，ヒグス–キップル（Higgs-Kibble）機構の超対称な拡張である．

これらの模型は，容易にノンアーベリアン対称群に拡張できる．超対称な解が必要とするのは

$$F_k^* = -\lambda_k - m_{ik}a_i - g_{ijk}a_ia_j = 0. \tag{8.24}$$

パラメーター λ，m，g は内部対称群で制限される．ゲージ理論では，超対称な最小は，また

$$D^\ell = a_i^+ T_{ik}^\ell a_k = 0 \tag{8.25}$$

を満たさなければならない．ファイエ–イリオポロス D 項は，超対称模型のノンアーベリアン部門ではゲージ不変でないので現れない．

本章の残りの部分では，式 (8.24) が，ノンアーベリアン理論の超対称性の破れを決定することを示す．すなわち，式 (8.24) が解 a_i をもてば，そのとき常に式 (8.25) を満たす解 $\hat{a}_i$ も見つけることができる．これを半単純ゲージ群 G の場合に演示する．

はじめに，$F^*{}_k(a_i) = 0$ を満たす解を見つけたとする．それから

$$d^\ell = a_i^+ T_{ik}^\ell a_k \tag{8.26}$$

を計算する．ベクトル d^ℓ は正規表現のある方向を明示する．このベクトルをカルタン部分代数のベクトルの一次結合に変換する群の元が常に存在する．なぜならば，式 (8.24) は群 G に対して不変なので，この変換は a_i を別の解 $\tilde{a}_i$ に回転する．ベクトル d^ℓ はベクトル $\tilde{d}^\ell$ に変換し，ベクトル $\tilde{d}^\ell$ のゼロでない成分は，カルタン部分代数の内部にある．ここで，方向 $\tilde{d}^\ell$ が固有値 μ_i をもつ単一の生成子を定義するようにカルタン部分代数の中で線形変換をする．この基底では，$\tilde{d}^\ell$ のゼロでない成分は $\tilde{d}$ だけである：

$$\tilde{d} = \tilde{a}_i^+ \mu_i \tilde{a}_i. \tag{8.27}$$

式 (8.24) はまた，**複素**（*complex*）群パラメーターをもつゲージ変換に対して不変である．なぜならば，スカラー場の複素共役表現が F^* に入り込むことは決してないからである．$\tilde{d}$ 方向にこのようなゲージ変換をするのは自由である：

$$\hat{a}_i = \exp(\mu_i \eta)\tilde{a}_i. \tag{8.28}$$

すべての η の値に対して，パラメーター $\hat{a}_i$ は式 (8.24) を解く．η を実として次を

得る．

$$\hat{d} = \tilde{a}_i^+ \mu_i e^{2\mu_i \eta} \tilde{a}_i. \tag{8.29}$$

いまや，二つの場合を識別できる．最初の場合では，すべての μ_i（このとき $\tilde{a}_i \neq 0$）が同じ符号，正，とする．ここで $\eta \to -\infty$ とすると $\hat{d} = 0$ となる．2 番目の方法は，μ_i は両方の符号を考える．依然，$\hat{d} = 0$ なる η の値が存在する．特にわれわれは次に注目する．

$$\hat{d} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \eta} \tilde{a}_i^+ e^{2\mu_i \eta} \tilde{a}_i. \tag{8.30}$$

$\tilde{a}_i{}^+ e^{2\mu_i \eta} \tilde{a}_i$ を η の関数とみなすと，$\eta \to \pm\infty$ のとき，それは $+\infty$ にいく．したがって，それは η のある値に対して最小である．この点で．微分がゼロで $\hat{d} = 0$ である．

これで証明は完成する．われわれは，ノンアーベリアン模型では F 項によって超対称性の自発的破れが制御されることを示した．方程式 $F_k^* = 0$ が解をもたないそのときにかぎり超対称性が自発的に破れている．これが超対称性の破れのオラファティ機構である．

文　　献

P. Fayet and J. Iliopoulos, Phys. Lett. **51B**, 461 (1974).
E. Witten, Nucl. Phys. **B188**, 513 (1981).

演　　習

(1)　$m^2 > 2\lambda g$ のとき，$A_1 = A_2 = 0$ がオラファティ模型の最小であることを示せ．最小におけるポテンシャルの値は λ^2 で A_0 によらないことを示せ．

(2)　オラファティ模型でボソンとフェルミオンの質量を計算せよ．

実スカラー質量：0，0，m^2，m^2，$m^2 \pm 2g\lambda$

スピノル質量：0，$2m$

無質量スカラーとスピノルが，自発的超対称性の破れをもつオラファティ模型の一般的な特徴である．また，この模型で $\partial F_k{}^*/\partial A_i$ を計算して

$$\det\left(\frac{\partial F_k^*}{\partial A_i}\right) \equiv 0$$

を示せ．これが，オラファティ模型のもう一つの一般的特徴である．

(3)　R–特性が $n_0 = 1$，$n_1 = 0$，$n_2 = 1$ であるカイラル超場，Φ_0，Φ_1，Φ_2 を考える．最も一般的な超対称的くり込み可能，R–不変なラグランジアンで，また，以下

の不連続変換に不変なものを構築せよ．

$$\Phi_0 \to \Phi_0$$

$$\Phi_1 \to -\Phi_1$$

$$\Phi_2 \to -\Phi_2.$$

これがオラファティ模型を決めることを示せ，

(4)　式 (8.14) の $\tilde{\psi}$ が超対称変換のもとで変わらないことを示せ．

(5)　ラグランジアン (8.15) に D 項の $2\kappa V$ を加えて，ポテンシャルの極小での a_+，a_- を決めよ．

(6)　カイラル超場の 3 重項 $\mathbf{\Phi}_i$（$i = 1, 2, 3$）を考える．次のラグランジアンの最小を決めよ．

$$\mathscr{L}_{P.E.} = m\mathbf{\Phi}_i \cdot \mathbf{\Phi}_i + \frac{1}{3} g \epsilon_{ijk} \mathbf{\Phi}_i \cdot (\mathbf{\Phi}_j \times \mathbf{\Phi}_k).$$

(7)　演習 (6) のポテンシャルの最小は，複素パラメーターの回転群に対して不変であることを示せ．

(8)　演習 (6) の模型をゲージ化し，任意の D 項が常に消去できることを示せ．この模型では，超対称性がファイエ–イリオポロス機構では破れないことを示せ．

9. 超場伝播関数

前章で，超場が超対称表現やラグランジアンを構成するのに非常に役に立つことをみた．本章では，超場が量子化された超対称性理論における輻射補正の計算を簡単にすることをみる．超対称性理論のファインマン則は超場の頂点関数や伝播関数で記述される．多くの成分場のファインマン図形が 1 個の超場図形に含まれるので，成分場の図形の間の奇跡的な相殺が 1 個の超場図形の中で明白である．この理由だけでも，超対称性理論の超場による定式化を発見したくなる．

超場の伝播関数を導くために，超空間内での積分の概念を導入しなければならない．グラスマン変数 η に関する不定積分は次のように定義される．

$$\int d\eta = 0, \qquad \int \eta\, d\eta = 1. \tag{9.1}$$

η のいかなる関数も多項式，$f(\eta) = c + \Delta\eta$，なので，定義 (9.1) は容易にグラスマン変数の任意関数に拡張でき：

$$\begin{aligned} f(\eta) &= c + \Delta\eta \\ \int f(\eta)\, d\eta &= \Delta \\ \int f(\eta)\eta\, d\eta &= c \end{aligned} \tag{9.2}$$

となる．

$$\int \frac{\partial}{\partial\eta} f(\eta)\, d\eta = 0$$

なので，部分積分は常に可能である．積分と微分がグラスマン変数の関数の上では，同じ結果を与えることに注目せよ．

デルタ関数は積分

$$\int f(\eta)\, \delta(\eta)\, d\eta = f(0) \tag{9.3}$$

で定義される．式 (9.2) より，

$$\delta(\eta)=\eta. \tag{9.4}$$

その結果

$$\delta(\eta)\,\delta(\eta)=0 \tag{9.5}$$

である．超空間内の体積要素の定義を

$$\begin{aligned} d^2\theta &= -\frac{1}{4}d\theta^\alpha\, d\theta^\beta \varepsilon_{\alpha\beta} \\ d^2\overline{\theta} &= -\frac{1}{4}d\overline{\theta}_{\dot\alpha}\, d\overline{\theta}_{\dot\beta}\varepsilon^{\dot\alpha\dot\beta} \\ d^4\theta &= d^2\theta\, d^2\overline{\theta} \end{aligned} \tag{9.6}$$

とすると，

$$\int \theta\theta\, d^2\theta = 1, \qquad \int \overline{\theta}\,\overline{\theta}\, d^2\overline{\theta}=1. \tag{9.7}$$

これが，ラグランジアン (5.10) を超空間上での積分として書くことを可能にする：

$$\begin{aligned} \mathscr{L} = \int \Big\{ & \Phi_i{}^+\Phi_i + \frac{1}{2}m_{ij}\Phi_i\Phi_j\delta(\overline{\theta}) \\ & + \frac{1}{2}m_{ij}{}^*\Phi_i{}^+\Phi_j{}^+\delta(\theta) + \frac{1}{3}\lambda_{ijk}\Phi_i\Phi_j\Phi_k\delta(\overline{\theta}) \\ & + \frac{1}{3}\lambda_{ijk}{}^*\Phi_i{}^+\Phi_j{}^+\Phi_k{}^+\delta(\theta)\Big\}\, d^2\theta\, d^2\overline{\theta}. \end{aligned} \tag{9.8}$$

超空間内での摂動論は，通常の摂動論の直接的拡張として展開してよい．特に，超場のグリーン関数

$$\begin{aligned} \langle 0|\mathrm{T}\{ & \Phi(x^1,\theta^1,\overline{\theta}^1)\cdots\Phi(x^\ell,\theta^\ell,\overline{\theta}^\ell)\Phi^+(x^{\ell+1},\theta^{\ell+1},\overline{\theta}^{\ell+1}) \\ & \cdots\Phi^+(x^r,\theta^r,\overline{\theta}^r)\}|0\rangle \end{aligned} \tag{9.9}$$

を計算したい．これらから，$\theta^1,\overline{\theta}^1,\cdots\theta^r,\overline{\theta}^r$ の級数展開により成分場グリーン関数を回復する．

どのような場の理論でもそうであるように，自由場の 2 点関数，伝播関数の計算から始める．カイラル場に対してこれらはラグランジアン (9.8) の自由場部分：

$$\mathscr{L}_0 = \int \left\{ \Phi^+\Phi + \frac{1}{2}m\Phi\Phi\delta(\overline{\theta}) + \frac{1}{2}m^*\Phi^+\Phi^+\delta(\theta) \right\} d^2\theta\, d^2\overline{\theta}$$
$$= A^*\Box A + i\partial_m\overline{\psi}\,\overline{\sigma}^m\psi + F^*F + m\left(AF + A^*F^* - \frac{1}{2}\psi\psi - \frac{1}{2}\overline{\psi}\,\overline{\psi}\right) \tag{9.10}$$

から求まる．成分では，

$$\begin{aligned}
\langle 0|\mathrm{T}\{A(x)A^*(x')\}|0\rangle &= i\Delta_F(x-x') \\
\langle 0|\mathrm{T}\{A(x)F(x')\}|0\rangle &= \langle 0|\mathrm{T}\{A^*(x)F^*(x')\}|0\rangle \\
&= -im\Delta_F(x-x') \\
\langle 0|\mathrm{T}\{F(x)F^*(x')\}|0\rangle &= i\Box\Delta_F(x-x') \\
\langle 0|\mathrm{T}\{\psi_\alpha(x)\psi^\beta(x')\}|0\rangle &= i\delta_\alpha{}^\beta m\Delta_F(x-x') \\
\langle 0|\mathrm{T}\{\overline{\psi}^{\dot\alpha}(x)\overline{\psi}_{\dot\beta}(x')\}|0\rangle &= i\delta^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta} m\Delta_F(x-x') \\
\langle 0|\mathrm{T}\{\psi_\alpha(x)\overline{\psi}_{\dot\beta}(x')\}|0\rangle &= \sigma_{\alpha\dot\beta}{}^m\partial_m\Delta_F(x-x').
\end{aligned} \tag{9.11}$$

ここで

$$\Delta_F(x) = \frac{1}{\Box - m^2}.$$

すべてのほかの 2 点関数は消える．これらの成分伝播関数を，超場伝播関数を構成するのに用いる．例えば，

$$\begin{aligned}
\langle 0|\mathrm{T}\{\Phi(y,\theta)\Phi(y',\theta')\}|0\rangle &= \langle 0|\mathrm{T}\{[A(y) + \sqrt{2}\theta\psi(y) + \theta\theta F(y)] \\
&\qquad \times[A(y') + \sqrt{2}\theta'\psi(y') + \theta'\theta' F(y')]\}|0\rangle \\
&= \theta'\theta'\langle 0|\mathrm{T}\{A(y)F(y')\}|0\rangle \\
&\qquad +\theta\theta\langle 0|\mathrm{T}\{F(y)A(y')\}|0\rangle \\
&\qquad +2\theta'^\beta\theta^\alpha\langle 0|\mathrm{T}\{\psi_\alpha(y)\psi_\beta(y')\}|0\rangle \\
&= -im(\theta-\theta')^2\Delta_F(y-y').
\end{aligned} \tag{9.12}$$

定義，$y = x + i\theta\sigma\overline{\theta}$，$y^+ = x - i\theta\sigma\overline{\theta}$ から，この伝播関数と $\Phi^+\Phi^+$ の伝播関数が次のような x, x' 依存性をもつことがわかる．

$$\begin{aligned}&\langle 0|\mathrm{T}\{\Phi(x,\theta,\overline{\theta})\Phi(x',\theta',\overline{\theta}')\}|0\rangle\\&\quad=-im\delta(\theta-\theta')\exp[i(\theta\sigma^m\overline{\theta}-\theta'\sigma^m\overline{\theta}')\partial_m{}^x]\Delta_F(x-x')\\&\langle 0|\mathrm{T}\{\Phi^+(x,\theta,\overline{\theta})\Phi^+(x',\theta',\overline{\theta}')\}|0\rangle\\&\quad=+im\delta(\overline{\theta}-\overline{\theta}')\exp[-i(\theta\sigma^m\overline{\theta}-\theta'\sigma^m\overline{\theta}')\partial_m{}^x]\Delta_F(x-x').\end{aligned}\tag{9.13}$$

同じ手続きに正確に従って，$\Phi\Phi^+$ の伝播関数を構成できる：

$$\begin{aligned}&\langle 0|\mathrm{T}\{\Phi(x,\theta,\overline{\theta})\Phi^+(x',\theta',\overline{\theta}')\}|0\rangle\\&\quad=i\exp[i(\theta\sigma^m\overline{\theta}+\theta'\sigma^m\overline{\theta}'-2\theta\sigma^m\overline{\theta}')\partial_m{}^x]\Delta_F(x-x').\end{aligned}\tag{9.14}$$

これらの伝播関数を用いて，超場のグリーン関数 (9.9) を摂動論の任意の次数で評価できる．n 次の寄与を超場で書くと，

$$\begin{aligned}&\left\langle 0\middle|\mathrm{T}\left\{\Phi(x^1,\theta^1,\overline{\theta}^1)\cdots\Phi^+(x^{\ell+1},\theta^{\ell+1},\overline{\theta}^{\ell+1})\right.\right.\\&\quad\left.\left.\cdots\int\mathscr{L}_{\mathrm{int}}(x_1')d^4x_1'\ \cdots\int\mathscr{L}_{\mathrm{int}}(x_n')d^4x_n'\right\}\middle|0\right\rangle\\&\quad=\left\langle 0\middle|\mathrm{T}\left\{\Phi\cdots\Phi^+\cdots\right.\right.\\&\qquad\int\frac{1}{3}[g\Phi^3(x_1',\theta_1',\overline{\theta}_1')\delta(\overline{\theta}_1)+g^*\Phi^{+3}(x_1',\theta_1',\overline{\theta}_1')\delta(\theta_1)]\\&\qquad\left.\left.d^4x_1'\,d^2\theta_1\,d^2\overline{\theta}_1\cdots\right\}\middle|0\right\rangle.\end{aligned}\tag{9.15}$$

ウィック（Wick）の定理を用いて，これらの表現を通常のファインマン図形に帰着させる．

見本の計算として，超場 2 点関数への 1 ループ補正を考える．これらは，図 9.1 に図示されている．図形 9.1 (a) は $\delta^2(\theta-\theta')=\delta(0)=0$ に比例し，一方，図形 9.1 (b) は $\delta^2(\overline{\theta}-\overline{\theta}')=\delta(0)=0$ になる．これは，質量のくり込みへのすべての寄与が，有限であっても無限であっても，いろいろな成分場の間で打ち消し合っていることを示している．最後の図形 9.1(c) は，

$$\begin{aligned}&\int d^4x\,d^4x'd^2\theta\,d^2\theta'd^2\overline{\theta}\,d^2\overline{\theta}'\delta(\overline{\theta})\,\delta(\theta')\\&\quad\times\Phi(x,\theta,\overline{\theta})\exp[i(\theta\sigma^m\overline{\theta}+\theta'\sigma^m\overline{\theta}'-2\theta\sigma^m\overline{\theta}')\partial_m{}^x]\\&\quad\times\Delta_F(x-x')\exp[i(\theta\sigma^m\overline{\theta}+\theta'\sigma^m\overline{\theta}'-2\theta\sigma^m\overline{\theta}')\partial_m{}^x]\Delta_F(x-x')\\&\quad\times\Phi^+(x',\theta',\overline{\theta}')\end{aligned}$$

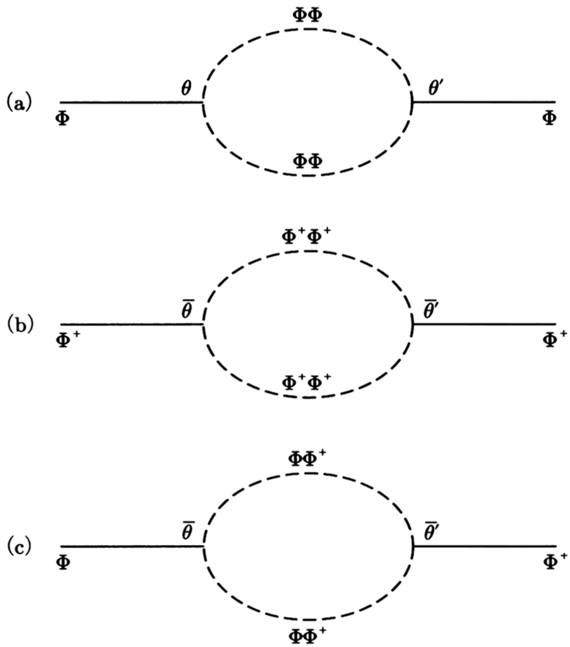


図 9.1　超場伝播関数．(a) $\Phi\Phi$，(b) $\Phi\Phi^+$，(c) $\Phi^+\Phi^+$ の 1 ループ補正．

$$= \int d^4x\, d^4x' d^2\theta\, d^2\overline{\theta} \Delta_F{}^2(x-x')\Phi(x,\theta,0)\exp[-2i\theta\sigma^m\overline{\theta}\partial_m{}^{x'}]\Phi^+(x',0,\overline{\theta}) \tag{9.16}$$

に比例する．この結果を得るには，δ–関数について積分したが，$\overline{\theta}'$ を $\overline{\theta}$ でおき換えて部分積分した．上の表現の $\Delta_F{}^2$ は対数発散になるが，それは対数発散の波動関数のくり込みに吸収できる．

すべての閉じたループ図形は，それが伝播関数 $\Phi\Phi$ または $\Phi^+\Phi^+$ だけを含むときは，消えることが容易にわかる．これは，閉じたループ図形が $\theta, \overline{\theta}$–空間で $\delta(0)$ に比例することからただちに出る．特に，この理論（図 9.2）では消えない（ゼロでない）タドポール（tadpole）図形はない．同様に，結合定数のくり込み（図 9.3）への有限な寄与も無限大の寄与もともにない．

超場伝播関数 (9.13)，(9.14) は，自由場の方程式に対する超空間グリーン関数とし

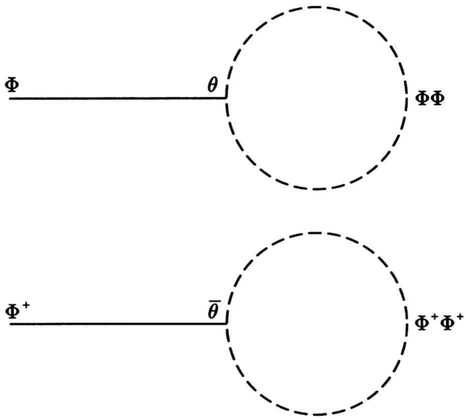


図 9.2 すべてのタドポール図形は恒等的に消える.

て直接求まる．これをみるために，自由場ラグランジアン (9.10) を次の形に書く：

$$\mathscr{L}_0 = \int \left\{\Phi^+\Phi - \frac{1}{8}m\left(\Phi\frac{DD}{\Box}\Phi + \Phi^+\frac{\overline{D}\,\overline{D}}{\Box}\Phi^+\right)\right\} d^4x\, d^2\theta\, d^2\overline{\theta}$$

$$= \int \frac{1}{2}(\Phi, \Phi^+)\mathscr{M}\begin{pmatrix}\Phi \\ \Phi^+\end{pmatrix} d^4x\, d^2\theta\, d^2\overline{\theta}. \qquad \textbf{(9.17)}$$

ここで，

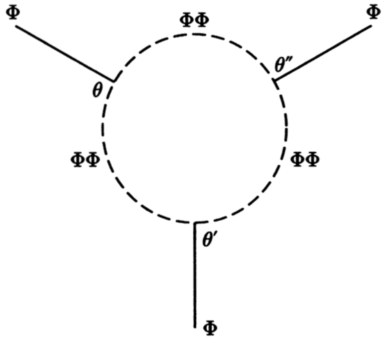
$$\mathscr{M} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{4}\dfrac{m}{\Box}DD & 1 \\ 1 & -\dfrac{1}{4}\dfrac{m}{\Box}\overline{D}\,\overline{D} \end{pmatrix}$$

である．この表現が正しいのは，x–積分のもとで $d^2\overline{\theta}$ が $-(1/4)\overline{D}\,\overline{D}$ に等価であることと，$(1/16)\overline{D}\,\overline{D}DD/\Box$ がカイラル場に対する射影演算子：

$$\frac{1}{16}\frac{\overline{D}\,\overline{D}DD}{\Box}\Phi = \Phi, \qquad \text{もし } \overline{D}\Phi = 0 \text{ ならば},$$

$$\overline{D}\frac{1}{16}\frac{\overline{D}\,\overline{D}DD}{\Box} = 0 \qquad (9.18)$$

であることによる．



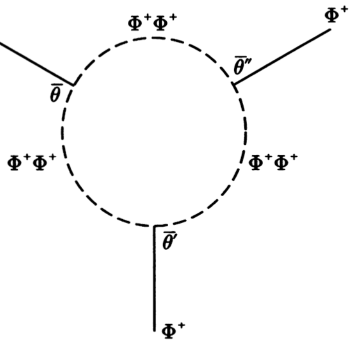


図 9.3　Φ^3，Φ^{+3} 結合への 0 でない補正はない

もし，式 (9.17) から変分原理で場の方程式を導きたいときには，カイラル場 Φ，Φ^+ が拘束に従うことを考慮しなければならない．これは，y, y^+ 基底での Φ と Φ^+ の変分：

$$\frac{\delta}{\delta\Phi(y,\theta)}\Phi(y',\theta') = \delta(y-y')\delta(\theta-\theta') \tag{9.19}$$

によって行える．これらの基底で，場の変分は自動的にカイラル性を維持する．この結果を使って全超空間積分下の Φ，Φ^+ の変分：

$$\frac{\delta}{\delta\Phi(x,\theta,\overline{\theta})}\int \Phi(x',\theta',\overline{\theta}')F(x',\theta',\overline{\theta}')d^4x'd^2\theta'd^2\overline{\theta}'$$

$$= \frac{\delta}{\delta\Phi(y,\theta)} \int \Phi(y',\theta') F(y' - i\theta'\sigma\overline{\theta}', \theta', \overline{\theta}') d^4y' d^2\theta' d^2\overline{\theta}'$$
$$= \int \delta(y-y')\delta(\theta-\theta') F(y' - i\theta'\sigma\overline{\theta}, \theta', \overline{\theta}) d^4y' d^2\theta' d^2\overline{\theta}$$
$$= \int F(y - i\theta\sigma\overline{\theta}, \theta, \overline{\theta}) d^2\overline{\theta}$$
$$= -\frac{1}{4}\overline{D}\,\overline{D}F(x,\theta,\overline{\theta}) \tag{9.20}$$

を求める．ここで，$\Phi(x,\theta,\overline{\theta}) = \Phi(y,\theta)$，$y = x + i\theta\sigma\overline{\theta}$ である．式 (9.20) は形式的規則：

$$\frac{\delta}{\delta\Phi(x,\theta,\overline{\theta})}\Phi(x',\theta',\overline{\theta}') = -\frac{1}{4}\overline{D}\,\overline{D}\,\delta(\theta-\theta')\delta(\overline{\theta}-\overline{\theta}')\delta(x-x') \tag{9.21}$$

に要約される．この規則は式 (9.20) を再現する：

$$\frac{\delta}{\delta\Phi(x,\theta,\overline{\theta})} \int \Phi(x',\theta',\overline{\theta}') F(x',\theta',\overline{\theta}') d^4x' d^2\theta' d^2\overline{\theta}'$$
$$= \int -\frac{1}{4}\overline{D}\,\overline{D}\,\delta(\theta-\theta')\delta(\overline{\theta}-\overline{\theta}')\delta(x-x') F(x',\theta',\overline{\theta}') d^4x' d^2\theta' d^2\overline{\theta}'$$
$$= -\frac{1}{4}\overline{D}\,\overline{D}F(x,\theta,\overline{\theta}). \tag{9.22}$$

ここで部分積分によって最終結果を得た．

自由場オイラー–ラグランジュ方程式は，式 (9.21) に従って式 (9.17) を変分することで見つかる：

$$-\frac{1}{4}\begin{pmatrix} \overline{D}^2 & 0 \\ 0 & D^2 \end{pmatrix} \mathscr{M} \begin{pmatrix} \Phi \\ \Phi^+ \end{pmatrix} = 0. \tag{9.23}$$

これらの方程式は式 (9.18) の助けによりさらに簡単になり，

$$\begin{aligned} m\Phi - \frac{1}{4}\overline{D}\,\overline{D}\Phi^+ &= 0 \\ m\Phi^+ - \frac{1}{4}DD\Phi &= 0. \end{aligned} \tag{9.24}$$

ここでわれわれは，第 4 章演習 (7) で初めてみた有質量カイラル多重項に対する場の方程式であることがわかる．

われわれは，カイラル超場を古典的な外部源（external source）に常に結合させることができる．カイラル源

$$\overline{D}_{\dot{\alpha}} J = D_\alpha J^+ = 0 \tag{9.25}$$

に対しては，次のラグランジアン

$$\mathscr{L} = \int \left\{ \frac{1}{2}(\Phi, \Phi^+) \mathscr{M} \begin{pmatrix} \Phi \\ \Phi^+ \end{pmatrix} + (\Phi, \Phi^+) \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}\frac{D^2}{\Box} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4}\frac{\overline{D}^2}{\Box} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J \\ J^+ \end{pmatrix} \right\} d^4x\, d^2\theta\, d^2\overline{\theta} \tag{9.26}$$

と，場の方程式：

$$\frac{1}{4} \begin{pmatrix} \overline{D}^2 & 0 \\ 0 & D^2 \end{pmatrix} \mathscr{M} \begin{pmatrix} \Phi \\ \Phi^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J \\ J^+ \end{pmatrix} \tag{9.27}$$

を得る．超場グリーン関数は (9.27) と類似に定義され：

$$\frac{1}{4} \begin{pmatrix} \overline{D}^2 & 0 \\ 0 & D^2 \end{pmatrix} \mathscr{M} \Delta = - \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}\overline{D}^2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4}D^2 \end{pmatrix} \delta(\theta - \theta')\delta(\overline{\theta} - \overline{\theta}')\delta(x - x'). \tag{9.28}$$

δ–関数に演算子 $-(1/4)D^2$ と $-(1/4)\overline{D}^2$ が掛かっているのは，式 (9.27) がカイラル源に対してのみ解をもつからである．超場グリーン関数 Δ は，J と J^+ とで Φ と Φ^+ を与える：

$$\begin{pmatrix} \Phi \\ \Phi^+ \end{pmatrix} = -\int \Delta(x, \theta, \overline{\theta}; x', \theta', \overline{\theta}') \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}\frac{D^2}{\Box} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4}\frac{\overline{D}^2}{\Box} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J \\ J^+ \end{pmatrix} d^4x' d^2\theta' d^2\overline{\theta}'. \tag{9.29}$$

グリーン関数を解くためにカイラル射影演算子

$$P_1 = \frac{1}{16}\frac{D^2\overline{D}^2}{\Box}, \qquad P_2 = \frac{1}{16}\frac{\overline{D}^2 D^2}{\Box} \tag{9.30}$$

の代数的性質を使うが，そのために 3 個の付加的演算子：

$$P_+ = \frac{D^2}{4\Box^{1/2}}, \qquad P_= \frac{\overline{D}^2}{4\Box^{1/2}}, \qquad P_T = -\frac{1}{8\Box} D\,\overline{D}^2 D \qquad \mathbf{(9.31)}$$

を導入する．短い計算で，

$$P_1 + P_2 + P_T = 1 \tag{9.32}$$

と，次の積表とがただちに確かめられる：

	P_1	P_2	P_+	P_-	P_T
P_1	P_1	0	P_+	0	0
P_2	0	P_2	0	P_-	0
P_+	0	P_+	0	P_1	0
P_-	P_-	0	P_2	0	0
P_T	0	0	0	0	P_T

(9.33)

この積表で，われわれは，式 (9.28) の微分演算子を次の形に容易に表せる：

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} \overline{D}^2 & 0 \\ 0 & D^2 \end{pmatrix} \mathscr{M} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \overline{D}^2 & 0 \\ 0 & D^2 \end{pmatrix} \mathscr{M} \begin{pmatrix} P_2 & 0 \\ 0 & P_1 \end{pmatrix}. \tag{9.34}$$

式 (9.34) を使うと，

$$\Delta = \begin{pmatrix} P_2 & 0 \\ 0 & P_1 \end{pmatrix} \mathscr{M}^{-1} \delta(\theta - \theta')\delta(\overline{\theta} - \overline{\theta}')\delta(x - x') \qquad \mathbf{(9.35)}$$

が式 (9.28) に対するグリーン関数であることを容易に示すことができる．付加的射影演算子は，Δ がカイラル超場に対する伝播関数であることを保証する．

Δ を求めるために，$\mathscr{M}$ の逆を見つけなければならない．これは $\mathscr{M}$ を P–演算子で展開するのが最も簡単である：

$$\mathscr{M} = \begin{pmatrix} -\frac{m}{\Box^{1/2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P_+ + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{m}{\Box^{1/2}} \end{pmatrix} P_- + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \{P_1 + P_2 + P_T\}. \tag{9.36}$$

その形が

$$X = AP_1 + DP_2 + BP_+ + CP_- + EP_T \tag{9.37}$$

の型の演算子の逆は

$$\begin{aligned} X^{-1} = &[A - BD^{-1}C]^{-1}P_1 + [D - CA^{-1}B]^{-1}P_2 \\ &-A^{-1}B[D - CA^{-1}B]^{-1}P_+ \\ &-D^{-1}C[A - BD^{-1}C]^{-1}P_- + E^{-1}P_T \end{aligned} \tag{9.38}$$

で与えられる．ただし，A, D, E はすべて逆がある（正則）とする．これは直接計算，または，演習 (7) で与えられる P–演算子表現を用いることで示すことができる．その結果は，

$$\begin{aligned} \mathscr{M}^{-1} = &\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{\Box}{\Box - m^2} & 0 \end{pmatrix} P_1 + \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{\Box}{\Box - m^2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} P_2 \\ &+ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{m}{\Box^{1/2}}\dfrac{\Box}{\Box - m^2} \end{pmatrix} P_+ + \begin{pmatrix} \dfrac{m}{\Box^{1/2}}\dfrac{\Box}{\Box - m^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P_- + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} P_T \\ = &\begin{pmatrix} \dfrac{m}{\Box^{1/2}}\dfrac{\Box}{\Box - m^2}P_- & P_1 + \dfrac{\Box}{\Box - m^2}P_2 + P_T \\ \dfrac{\Box}{\Box - m^2}P_1 + P_2 + P_T & \dfrac{m}{\Box^{1/2}}\dfrac{\Box}{\Box - m^2}P_+ \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{9.39}$$

式 (9.35) と積表 (9.33) から，伝播関数 Δ は

$$\begin{aligned} \Delta = &\begin{pmatrix} \dfrac{m}{\Box^{1/2}}\dfrac{\Box}{\Box - m^2}P_- & \dfrac{\Box}{\Box - m^2}P_2 \\ \dfrac{\Box}{\Box - m^2}P_1 & \dfrac{m}{\Box^{1/2}}\dfrac{\Box}{\Box - m^2}P_+ \end{pmatrix} \delta(x - x')\delta(\theta - \theta')\delta(\overline{\theta} - \overline{\theta}') \\ = &\frac{1}{\Box - m^2}\begin{pmatrix} \dfrac{m}{4}\overline{D}^2 & \dfrac{1}{16}\overline{D}^2 D^2 \\ \dfrac{1}{16}D^2\overline{D}^2 & \dfrac{m}{4}D^2 \end{pmatrix} \delta(x - x')\delta(\theta - \theta')\delta(\overline{\theta} - \overline{\theta}') \end{aligned} \tag{9.40}$$

となる．

この結果を前出の伝播関数 (9.13)，(9.14) と比較するために δ–関数のスピノル微分：

$$
\begin{aligned}
D_1{}^2(\theta_1-\theta_2)^2 &= -4\exp[-i(\theta_1-\theta_2)\sigma^n\overline{\theta}_1\partial_n{}^1] \\
D_1{}^2(\overline{\theta}_1-\overline{\theta}_2)^2 &= -4\exp[i\theta_1\sigma^n(\overline{\theta}_1-\overline{\theta}_2)\partial_n{}^1] \\
\overline{D}_1{}^2D_1{}^2(\theta_1-\theta_2)^2(\overline{\theta}_1-\overline{\theta}_2)^2 &= 16\exp[i(\theta_1\sigma^n\overline{\theta}_1+\theta_2\sigma^n\overline{\theta}_2-2\theta_1\sigma^n\overline{\theta}_2)\partial_n{}^1] \\
D_1{}^2\overline{D}_1{}^2(\theta_1-\theta_2)^2(\overline{\theta}_1-\overline{\theta}_2)^2 &= 16\exp[-i(\theta_1\sigma^n\overline{\theta}_1+\theta_2\sigma^n\overline{\theta}_2-2\theta_2\sigma^n\overline{\theta}_1)\partial_n{}^1]
\end{aligned}
\tag{9.41}
$$

を計算しなければならない．これらの関係式の証明は読者に直接微分の練習として残す．式 (9.41) を式 (9.40) に代入して

$$
\frac{1}{\Box-m^2}\begin{pmatrix}\Delta_{11} & \Delta_{12}\\ \Delta_{21} & \Delta_{22}\end{pmatrix}\delta(x-x'). \tag{9.42}
$$

ここで，

$$
\begin{aligned}
\Delta_{11} &= -m\delta(\theta-\theta')\exp[i(\theta\sigma^n\overline{\theta}-\theta'\sigma^n\overline{\theta}')\partial_n] \\
\Delta_{12} &= \exp[i(\theta\sigma^n\overline{\theta}+\theta'\sigma^n\overline{\theta}'-2\theta\sigma^n\overline{\theta}')\partial_n] \\
\Delta_{21} &= \exp[-i(\theta\sigma^n\overline{\theta}+\theta'\sigma^n\overline{\theta}'-2\theta'\sigma^n\overline{\theta})\partial_n] \\
\Delta_{22} &= -m\delta(\overline{\theta}-\overline{\theta}')\exp[-i(\theta\sigma^n\overline{\theta}-\theta'\sigma^n\overline{\theta}')\partial_n].
\end{aligned}
\tag{9.43}
$$

この結果は，式 (9.13)，(9.14) と恒等的である．式 (9.42) では，$\theta[\overline{\theta}]$ を，それに $\delta(\theta-\theta')[\delta(\overline{\theta}-\overline{\theta}')]$ が掛かっているときはいつも，$\theta'[\overline{\theta}']$ でおき換えた．超場の方法の経験を積んだので，今度はベクトル超場の伝播関数を計算する．第 6 章で概説された通常のラグランジアン

$$
\mathscr{L} = \frac{1}{4}W^\alpha W_\alpha|_{\theta\theta} + \frac{1}{4}\overline{W}_{\dot{\alpha}}\overline{W}^{\dot{\alpha}}|_{\overline{\theta}\overline{\theta}} + m^2V^2|_{\theta\theta\overline{\theta}\overline{\theta}} \tag{9.44}
$$

から始める．これに，ゲージ固定項 $-\xi(\overline{D}^2V)(D^2V)/8$ 加える．この項が，成分場ラグランジアンに $(\partial_m v^m)^2$ に比例する部分をつくり出す．

伝播関数を見つけるために，作用を超空間上の積分として書く：

$$\begin{aligned}\mathscr{L} &= \int \left\{ \frac{1}{4} W^\alpha W_\alpha \delta(\overline{\theta}) + \frac{1}{4} \overline{W}_{\dot\alpha} \overline{W}^{\dot\alpha} \delta(\theta) + m^2 V^2 - \frac{\xi}{8} (\overline{D}^2 V)(D^2 V) \right\} d^4x\, d^2\theta\, d^2\overline{\theta} \\ &= \int \left\{ \frac{1}{8} V D \overline{D}^2 D V + m^2 V V - \frac{\xi}{16} V (D^2 \overline{D}^2 + \overline{D}^2 D^2) V \right\} d^4x\, d^2\theta\, d^2\overline{\theta} \\ &= \int \{ V[-\Box P_T + m^2(P_1 + P_2 + P_T) - \xi(P_1 + P_2)\Box] V \} d^4x\, d^2\theta\, d^2\overline{\theta} \\ &= \int V \mathscr{N} V d^4x\, d^2\theta\, d^2\overline{\theta}. \end{aligned} \tag{9.45}$$

オイラー–ラグランジュ方程式は変分原理から見つかり

$$\mathscr{N} V = 0. \tag{9.46}$$

そして超場伝播関数は通常の方法で定義され，

$$\mathscr{N} \Delta = \delta(x - x')\delta(\theta - \theta')\delta(\overline{\theta} - \overline{\theta}'). \tag{9.47}$$

ラグランジアン (9.45) から期待された $2\mathscr{N}$ ではなく $\mathscr{N}$ を逆にすることを選択したことに注目せよ．超場伝播関数のこの規格化が，成分場のグリーン関数の通常の規格化になる．Δ について解くと，

$$\Delta = \mathscr{N}^{-1} \delta(x - x')\delta(\theta - \theta')\delta(\overline{\theta} - \overline{\theta}'). \tag{9.48}$$

$\mathscr{N}$ の逆は，

$$\mathscr{N}^{-1} = \frac{1}{-\Box + m^2} P_T + \frac{1}{m^2 - \xi\Box} (P_1 + P_2). \tag{9.49}$$

そして式 (9.41)，

$$\begin{aligned} &(P_1 + P_2)\delta(x - x')\delta(\theta_1 - \theta_2)\delta(\overline{\theta}_1 - \overline{\theta}_2) \\ &\quad = \frac{1}{16\Box} (\overline{D}_1{}^2 D_1{}^2 + D_1{}^2 \overline{D}_1{}^2) \delta(x - x')\delta(\theta_1 - \theta_2)\delta(\overline{\theta}_1 - \overline{\theta}_2) \\ &\quad = \frac{1}{2\Box} \exp[i(\theta_2 \sigma^n \overline{\theta}_1 - \theta_1 \sigma^n \overline{\theta}_2)\partial_n][4 + \Box(\theta_1 - \theta_2)^2(\overline{\theta}_1 - \overline{\theta}_2)^2]\delta(x - x') \\ &P_T \delta(x - x')\delta(\theta_1 - \theta_2)\delta(\overline{\theta}_1 - \overline{\theta}_2) \\ &\quad = (1 - P_1 - P_2)\delta(x - x')\delta(\theta_1 - \theta_2)\delta(\overline{\theta}_1 - \overline{\theta}_2) \\ &\quad = -\frac{1}{2\Box} \exp[i(\theta_2 \sigma^n \overline{\theta}_1 - \theta_1 \sigma^n \overline{\theta}_2)\partial_n] \times [4 - \Box(\theta_1 - \theta_2)^2(\overline{\theta}_1 - \overline{\theta}_2)^2]\delta(x - x'). \end{aligned} \tag{9.50}$$

を用いて，われわれは，ベクトル超場に対する伝播関数を発見する．

$$\Delta = -\frac{1}{2\Box}\exp[i(\theta_2\sigma^n\overline{\theta}_1 - \theta_1\sigma^n\overline{\theta}_2)\partial_n]$$
$$\times\left\{\frac{1}{-\Box+m^2}[4-\Box\delta(\theta_1-\theta_2)\delta(\overline{\theta}_1-\overline{\theta}_2)]\right.$$
$$\left.-\frac{1}{-\xi\Box+m^2}[4+\Box\delta(\theta_1-\theta_2)\delta(\overline{\theta}_1-\overline{\theta}_2)]\right\}\delta(x_1-x_2). \quad \mathbf{(9.51)}$$

文　　献

K. Fujikawa and W. Lang, Nucl. Phys. **B88**, 61(1975).
S. Ferrara and P. Piguet, Nucl. Phys. **B93**, 261(1975).

重要な式

$$\mathscr{L}_0 = \int\left\{\Phi^+\Phi + \frac{1}{2}m\Phi\Phi\delta(\overline{\theta}) + \frac{1}{2}m^*\Phi^+\Phi^+\delta(\theta)\right\}d^2\theta\, d^2\overline{\theta}$$
$$= A^*\Box A + i\partial_m\overline{\psi}\,\overline{\sigma}^m\psi + F^*F + m\left(AF + A^*F^* - \frac{1}{2}\psi\psi - \frac{1}{2}\overline{\psi}\,\overline{\psi}\right) \quad \mathbf{(9.10)}$$

$$\begin{aligned}
\langle 0|\mathrm{T}\{A(x)A^*(x')\}|0\rangle &= i\Delta_F(x-x') \\
\langle 0|\mathrm{T}\{A(x)F(x')\}|0\rangle &= \langle 0|\mathrm{T}\{A^*(x)F^*(x')\}|0\rangle \\
&= -im\Delta_F(x-x') \\
\langle 0|\mathrm{T}\{F(x)F^*(x')\}|0\rangle &= i\Box\Delta_F(x-x') \\
\langle 0|\mathrm{T}\{\psi_\alpha(x)\psi^\beta(x')\}|0\rangle &= i\delta_\alpha{}^\beta m\Delta_F(x-x') \\
\langle 0|\mathrm{T}\{\overline{\psi}^{\dot{\alpha}}(x)\overline{\psi}_{\dot{\beta}}(x')\}|0\rangle &= i\delta^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}}m\Delta_F(x-x') \\
\langle 0|\mathrm{T}\{\psi_\alpha(x)\overline{\psi}_{\dot{\beta}}(x')\}|0\rangle &= \sigma_{\alpha\dot{\beta}}{}^m\partial_m\Delta_F(x-x') \\
\Delta_F(x) &= \frac{1}{\Box - m^2}
\end{aligned} \quad \mathbf{(9.11)}$$

$$\begin{aligned}
&\langle 0|\mathrm{T}\{\Phi(x,\theta,\overline{\theta})\Phi(x',\theta',\overline{\theta}')\}|0\rangle \\
&\quad = -im\delta(\theta-\theta')\exp[i(\theta\sigma^m\overline{\theta} - \theta'\sigma^m\overline{\theta}')\partial_m{}^x]\Delta_F(x-x') \\
&\langle 0|\mathrm{T}\{\Phi^+(x,\theta,\overline{\theta})\Phi^+(x',\theta',\overline{\theta}')\}|0\rangle \\
&\quad = +im\delta(\overline{\theta}-\overline{\theta}')\exp[-i(\theta\sigma^m\overline{\theta} - \theta'\sigma^m\overline{\theta}')\partial_m{}^x]\Delta_F(x-x')
\end{aligned} \quad \mathbf{(9.13)}$$

$$\begin{aligned}
&\langle 0|\mathrm{T}\{\Phi(x,\theta,\overline{\theta})\Phi^+(x',\theta',\overline{\theta}')\}|0\rangle \\
&\quad = i\exp[i(\theta\sigma^m\overline{\theta} + \theta'\sigma^m\overline{\theta}' - 2\theta\sigma^m\overline{\theta}')\partial_m{}^x]\Delta_F(x-x')
\end{aligned} \quad \mathbf{(9.14)}$$

$$\mathscr{L}_0 = \int \left\{ \Phi^+\Phi - \frac{1}{8}m\left(\Phi\frac{DD}{\Box}\Phi + \Phi^+\frac{\overline{D}\,\overline{D}}{\Box}\Phi^+ \right) \right\} d^4x\, d^2\theta\, d^2\overline{\theta}$$

$$= \int \frac{1}{2}(\Phi, \Phi^+)\mathscr{M}\begin{pmatrix} \Phi \\ \Phi^+ \end{pmatrix} d^4x\, d^2\theta\, d^2\overline{\theta} \qquad \textbf{(9.17)}$$

$$\mathscr{M} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}\frac{m}{\Box}DD & 1 \\ 1 & -\frac{1}{4}\frac{m}{\Box}\overline{D}\,\overline{D} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\delta}{\delta\Phi(x,\theta,\overline{\theta})}\Phi(x',\theta',\overline{\theta}') = -\frac{1}{4}\overline{D}\,\overline{D}\,\delta(\theta-\theta')\delta(\overline{\theta}-\overline{\theta}')\delta(x-x') \qquad \textbf{(9.21)}$$

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} \overline{D}^2 & 0 \\ 0 & D^2 \end{pmatrix}\mathscr{M}\Delta = -\begin{pmatrix} -\frac{1}{4}\overline{D}^2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4}D^2 \end{pmatrix}\delta(\theta-\theta')\delta(\overline{\theta}-\overline{\theta}')\delta(x-x') \qquad \textbf{(9.28)}$$

$$P_1 = \frac{1}{16}\frac{D^2\overline{D}^2}{\Box}, \qquad P_2 = \frac{1}{16}\frac{\overline{D}^2D^2}{\Box} \qquad \textbf{(9.30)}$$

$$P_+ = \frac{D^2}{4\Box^{1/2}}, \qquad P_= \frac{\overline{D}^2}{4\Box^{1/2}}, \qquad P_T = -\frac{1}{8\Box}D\,\overline{D}^2D \qquad \textbf{(9.31)}$$

$$\Delta = \begin{pmatrix} P_2 & 0 \\ 0 & P_1 \end{pmatrix}\mathscr{M}^{-1}\delta(\theta-\theta')\delta(\overline{\theta}-\overline{\theta}')\delta(x-x') \qquad \textbf{(9.35)}$$

$$\Delta = \frac{1}{\Box - m^2}\begin{pmatrix} \frac{m}{4}\overline{D}^2 & \frac{1}{16}\overline{D}^2D^2 \\ \frac{1}{16}D^2\overline{D}^2 & \frac{m}{4}D^2 \end{pmatrix}\delta(x-x')\delta(\theta-\theta')\delta(\overline{\theta}-\overline{\theta}') \qquad \textbf{(9.40)}$$

$$\mathscr{L} = \int \left\{ \frac{1}{4}W^\alpha W_\alpha\delta(\overline{\theta}) + \frac{1}{4}\overline{W}_{\dot\alpha}\overline{W}^{\dot\alpha}\delta(\theta) + m^2V^2 - \frac{\xi}{8}(\overline{D}^2V)(D^2V) \right\} d^4x\, d^2\theta\, d^2\overline{\theta}$$

$$= \int \{V[-\Box P_T + m^2(P_1+P_2+P_T) - \xi(P_1+P_2)\Box]V\} d^4x\, d^2\theta\, d^2\overline{\theta}$$

$$= \int V\mathscr{N}V d^4x\, d^2\theta\, d^2\overline{\theta} \qquad \textbf{(9.45)}$$

$$\mathcal{N}\Delta = \delta(x - x')\delta(\theta - \theta')\delta(\overline{\theta} - \overline{\theta}') \tag{9.47}$$

$$\begin{aligned}\Delta = &-\frac{1}{2\Box}\exp[i(\theta_2\sigma^n\overline{\theta}_1 - \theta_1\sigma^n\overline{\theta}_2)\partial_n] \\ &\times\left\{\frac{1}{-\Box + m^2}[4 - \Box\delta(\theta_1 - \theta_2)\delta(\overline{\theta}_1 - \overline{\theta}_2)]\right. \\ &\left.-\frac{1}{-\xi\Box + m^2}[4 + \Box\delta(\theta_1 - \theta_2)\delta(\overline{\theta}_1 - \overline{\theta}_2)]\right\}\delta(x_1 - x_2)\end{aligned} \tag{9.51}$$

演　　習

(1) 定義 (9.1) を用いて，$\eta' = a\eta$ が $d\eta' = a^{-1}d\eta$ を意味することを示せ.

(2) $\int f(\eta)\delta(\eta - \rho)d\eta = f(\rho)$ を調べよ.

(3) ラグランジアン (9.10) のボソン部分は

$$(A^+, F)\mathscr{M}\begin{pmatrix} A \\ F^+ \end{pmatrix}, \qquad \text{ここで } \mathscr{M} = \begin{pmatrix} \Box & m \\ M & 1 \end{pmatrix}$$

と書ける. AA^*, AF, A^*F^*, FF^* の伝播関数が，この演算子の逆で与えられることを示せ.

(4) $\Phi^+\Phi^+$，$\Phi\Phi^+$ の伝播関数を計算せよ.

(5) カイラルラグランジアンの運動部分を次のように書いてよいことを証明せよ.

$$\begin{aligned}&\int \Phi(x,\theta,\overline{\theta})\Phi^+(x,\theta,\overline{\theta})\, d^4x\, d^2\theta\, d^2\overline{\theta} \\ &\quad = \int \Phi(x,\theta,0)e^{-2i\theta\sigma^m\overline{\theta}\partial_m}\Phi^+(x,0,\overline{\theta})\, d^4x\, d^2\theta\, d^2\overline{\theta}.\end{aligned}$$

(6)

$$\begin{aligned}\int F(x,\theta,\overline{\theta})\, d^4x\, d^2\theta\, d^2\overline{\theta} &= \int\left(-\frac{1}{4}\right)\overline{D}\,\overline{D}F(x,\theta,\overline{\theta})\, d^4x\, d^2\theta \\ &= \int\left(-\frac{1}{4}\right)DDF(x,\theta,\overline{\theta})\, d^4x\, d^2\overline{\theta}\end{aligned}$$

を示せ.

(7)　積表 (9.33) を確認し，これらの演算子が次の行列表現をもつことを示せ．

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad P_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(8)　式 (9.32) と式 (9.33) を用いて直接掛けることにより，または，演習 (7) で与えられる P–演算子表示を用いて，式 (9.38) を証明せよ．

(9)　任意の行列 X，

$$X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

に対して，A^{-1}，D^{-1} が存在するときは，逆行列 X^{-1} が

$$X^{-1} = \begin{pmatrix} Z & Y \\ U & V \end{pmatrix}$$

で与えられることを示せ．B^{-1} と C^{-1} のみが存在するとき逆行列を計算せよ．ここで，

$$\begin{aligned} Z &= (A - BD^{-1}C)^{-1} \\ U &= -D^{-1}CZ \\ V &= (D - CA^{-1}B)^{-1} \\ Y &= -A^{-1}BV, \end{aligned}$$

である．

10. 超図表に対するファインマン則

本章では，超対称 Φ^3 模型

$$\mathscr{L} = \int d^2\theta\, d^2\overline{\theta}\Phi^+\Phi + \left\{\int d^2\theta\left[\frac{1}{2}m\Phi^2 + \frac{1}{3}g\Phi^3\right] + \text{h.c.}\right\} \quad \textbf{(10.1)}$$

に対するファインマン則を導く．これらの規則はすべてのカイラル模型に応用されて超対称ゲージ模型にも拡張される．われわれは，有効作用が次の形の一つの $d^4\theta = d^2\theta\, d^2\overline{\theta}$ 積分によって表されることを発見するであろう：

$$\int d^4\theta \int d^4x_1 \cdots d^4x_n F_1(x_1, \theta, \overline{\theta}) \cdots F_n(x_n, \theta, \overline{\theta}) G(x_1, . \ . , x_n). \quad (10.2)$$

関数 $G(x_1, \ldots, x_n)$ は並進不変で，F たちは超場とその微分の積である．F たちには因子 $\Box^{-1}$ が現れないので，カイラル演算子に対しては時空微分を導入することなしに $d^4\theta$ 積分を $d^2\theta$ に変えることはできない（演習 (2) 参照）．これは驚くべき結果をもたらす．すなわち，超対称性理論では $d^2\theta$ の形の質量項，結合項はくり込みを受けない．さらに，より高次元の運動量に依存しないカイラル演算子が有効超ポテンシャルに摂動論の任意の次数で誘起されることはない．方程式 (10.2) はまた真空から真空（vacuum to vacuum）へのすべてのダイアグラムは消えることを意味している．これは，どのような超場も含まない式 (10.2) の形の表現は $d^4\theta$ 積分でただちに消されるからである．

ファインマン則を導く前に生成汎関数

$$\begin{aligned} Z[J, J^+] &= \left\langle 0 \middle| \text{T} \exp i \int d^4\theta\, d^4x \left[J(z)\left(-\frac{1}{4}\frac{D^2}{\Box}\right)\Phi(z) \right.\right. \\ &\qquad \left.\left. + J^+(z)\left(-\frac{1}{4}\frac{\overline{D}^2}{\Box}\right)\Phi^+(z)\right] \middle| 0 \right\rangle \\ &= e^{i\int d^4x \mathscr{L}_{int}(\delta/\delta J, \delta/\delta J^+)} Z_0[J, J^+] \end{aligned} \quad \textbf{(10.3)}$$

の手短な導出を与える．ここで，超場グリーン関数は次で与えられる．

$$G^{(N)}(z^1,\dots,z^M;z^{M+1},\dots,z^N) = (-i)^N \frac{\delta}{\delta J(z^1)}\cdots\frac{\delta}{\delta J(z^M)}\frac{\delta}{\delta J^+(z^{M+1})}\cdots\frac{\delta}{\delta J^+(z^N)} Z[J,J^+]\Big|_{J=J^+=0}. \tag{10.4}$$

ここで，$Z_0[J,J^+]$ は自由超場グリーン関数で，$z^i=(x^i,\theta^i,\overline{\theta}^i)$ は超空間の元である．方程式 (10.3) は成分場であらわに証明される．われわれは，別の方法をとり，超場と超空間の技法を用いて直接に導出する．

前章で自由場 2 点関数を計算した．

$$\begin{aligned}
\langle 0|\mathrm{T}\Phi_0(z)\Phi_0(z')|0\rangle &= \frac{i}{\Box - m^2}\Delta_{11}(z,z')\delta(x-x')\\
\langle 0|\mathrm{T}\Phi_0^+(z)\Phi_0^+(z')|0\rangle &= \frac{i}{\Box - m^2}\Delta_{22}(z,z')\delta(x-x')\\
\langle 0|\mathrm{T}\Phi_0(z)\Phi_0^+(z')|0\rangle &= \frac{i}{\Box - m^2}\Delta_{12}(z,z')\delta(x-x')\\
\langle 0|\mathrm{T}\Phi_0^+(z)\Phi_0(z')|0\rangle &= \frac{i}{\Box - m^2}\Delta_{21}(z,z')\delta(x-x').
\end{aligned} \tag{10.5}$$

方程式の右辺は式 (9.43) の行列要素 Δ_{ij} を含んでいる．これらの 2 点関数は自由生成汎関数

$$\begin{aligned}
Z_0[J,J^+] &= \left\langle 0\left|\mathrm{T}\exp i\int d^4\theta\, d^4x \left[J(z)\left(-\frac{1}{4}\frac{D^2}{\Box}\right)\Phi_0(z)\right.\right.\right.\\
&\qquad \left.\left.\left. +J^+(z)\left(-\frac{1}{4}\frac{\overline{D}^2}{\Box}\right)\Phi_0^+(z)\right]\right|0\right\rangle\\
&= \exp -\frac{1}{2}\int d^4\theta\, d^4x\, d^4\theta'\, d^4x' \frac{i}{\Box - m^2}\\
&\quad\times\left\{(J(z),J^+(z))\begin{pmatrix}-\frac{1}{4}\frac{D^2}{\Box} & 0\\ 0 & -\frac{1}{4}\frac{\overline{D}^2}{\Box}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Delta_{11} & \Delta_{12}\\ \Delta_{21} & \Delta_{22}\end{pmatrix}\delta(x-x')\right.\\
&\quad\left.\times\begin{pmatrix}-\frac{1}{4}\frac{D'^2}{\Box'} & 0\\ 0 & -\frac{1}{4}\frac{\overline{D}'^2}{\Box'}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}J(z')\\ J^+(z')\end{pmatrix}\right\}
\end{aligned} \tag{10.6}$$

からすべて得られる.

この汎関数は，2点関数 Δ の積の和としてすべての自由場グリーン関数を生成する．式 (9.40)，(9.18) を援用して 2，3 の部分積分で

$$Z_0[J, J^+] = \exp -\frac{i}{2}\int d^4x\, d^4\theta\, d^4x'\, d^4\theta' (J(z), J^+(z))\Delta_{\mathrm{GRS}}(z, z')\begin{pmatrix} J(z') \\ J^+(z') \end{pmatrix} \tag{10.7}$$

を得る．ここで，Δ_{GRS} はグリサル（Grisaru），ロチェック（Roček）とジーゲル（Siegel）によって導入された伝播関数

$$\Delta_{\mathrm{GRS}}(z, z') = \frac{1}{\Box - m^2}\begin{pmatrix} \frac{m}{4}\frac{D^2}{\Box} & 1 \\ 1 & \frac{m}{4}\frac{\overline{D}^2}{\Box} \end{pmatrix}\delta(z - z') \tag{10.8}$$

である．規則 (9.21) を用いて Z_0 を J と J^+ について微分する：

$$\frac{1}{i}\begin{pmatrix} \dfrac{\delta}{\delta J(z)} \\ \dfrac{\delta}{\delta J^+(z)} \end{pmatrix} Z_0 = -\int d^4x'\, d^4\theta' \frac{1}{\Box - m^2}\begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} \end{pmatrix}\delta(x - x')$$
$$\times \left(-\frac{1}{4\Box}\right)\begin{pmatrix} D^2 J(z) \\ \overline{D}^2 J^+(z) \end{pmatrix} Z_0. \tag{10.9}$$

これから，Z_0 についての汎関数方程式

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} \overline{D}^2 & 0 \\ 0 & D^2 \end{pmatrix}\mathscr{M}\frac{1}{i}\begin{pmatrix} \dfrac{\delta}{\delta J(z)} \\ \dfrac{\delta}{\delta J^+(z)} \end{pmatrix} Z_0 = \begin{pmatrix} J(z) \\ J^+(z) \end{pmatrix} Z_0 \tag{10.10}$$

が得られる．ここで式 (9.28)，(9.18) を用いた．

この方程式を相互作用場の場合に一般化する．Φ^3 模型に対しては，場の方程式

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} \overline{D}^2 & 0 \\ 0 & D^2 \end{pmatrix}\mathscr{M}\begin{pmatrix} \Phi \\ \Phi^+ \end{pmatrix} - g\begin{pmatrix} \Phi^2 \\ \Phi^{+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J \\ J^+ \end{pmatrix} \tag{10.11}$$

が，Z に対して次の方程式を導く：

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix}\overline{D}^2 & 0 \\ 0 & D^2\end{pmatrix}\mathscr{M}\frac{1}{i}\begin{pmatrix}\dfrac{\delta}{\delta J(z)} \\ \dfrac{\delta}{\delta J^+(z)}\end{pmatrix}Z=\left\{\begin{pmatrix}J(z) \\ J^+(z)\end{pmatrix}+g\begin{pmatrix}\left(P_2\dfrac{1}{i}\dfrac{\delta}{\delta J(z)}\right)^2 \\ \left(P_1\dfrac{1}{i}\dfrac{\delta}{\delta J^+(z)}\right)^2\end{pmatrix}\right\}Z. \tag{10.12}$$

われわれは式 (10.12) に射影演算子を導入したことに留意せよ．式 (10.11) でこれを行うこともできたが，そこでは Φ がカイラル

$$P_2\Phi=\Phi, \qquad P_1\Phi^+=\Phi^+ \tag{10.13}$$

であることは明らかである．汎関数微分のカイラル性があまりあらわでないので，式 (10.12) に P_1，P_2 を残しておくことを選択する．

Z について解くために，まず交換関係を計算する．

$$\begin{aligned}\left[\left(P_2\frac{\delta}{\delta J(z)}\right)^3, J(z')\right]&=3\left(-\frac{1}{4}\right)\left(P_2\frac{\delta}{\delta J(z)}\right)^2\overline{D}^2\delta(z-z')\\&=3\left(-\frac{1}{4}\right)\overline{D}^2\left\{\left(P_2\frac{\delta}{\delta J(z)}\right)^2\delta(z-z')\right\}.\end{aligned} \tag{10.14}$$

最後の段階は，$\overline{D}P_2=0$ なので，可能である．$d^2\theta\, d^4x$ にわたって積分して

$$\begin{aligned}\left[\int d^2\theta\, d^4x\left(P_2\frac{\delta}{\delta J(z)}\right)^3, J(z')\right]&=3\int d^4\theta\, d^4x\,\delta(z-z')\left(P_2\frac{\delta}{\delta J(z)}\right)^2\\&=3\left(P_2\frac{\delta}{\delta J(z')}\right)^2.\end{aligned} \tag{10.15}$$

そして

$$\begin{aligned}&e^{i\frac{g}{3}\int d^4x'\,d^2\theta'\left(P_2\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(z')}\right)^3}J(z)e^{-i\frac{g}{3}\int d^4x'\,d^2\theta'\left(P_2\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(z')}\right)^3}\\&\quad=J(z)+g\left(P_2\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(z)}\right)^2\end{aligned} \tag{10.16}$$

を使って，式 (10.12) を次の形にする：

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix}\overline{D}^2 & 0\\ 0 & D^2\end{pmatrix}\mathscr{M}\frac{1}{i}\begin{pmatrix}\dfrac{\delta}{\delta J(z)}\\ \dfrac{\delta}{\delta J^+(z)}\end{pmatrix}Z = e^{i\int d^4x'\mathscr{L}_{int}\left(\delta/\delta J,\delta/\delta J^+\right)}\begin{pmatrix}J(z)\\ J^+(z)\end{pmatrix}$$
$$\times e^{-i\int d^4x'\mathscr{L}_{int}\left(\delta/\delta J,\delta/\delta J^+\right)}Z. \quad (10.17)$$

これより

$$Z_0[J,J^+] = e^{-i\int d^4x'\mathscr{L}_{int}\left(\delta/\delta J,\delta/\delta J^+\right)}Z[J,J^+]. \quad (10.18)$$

なぜなら，右辺は自由な方程式 (10.10) を満たすのである．すべての真空–真空ダイアグラムは消えるという事実から，規格化因子は必要ない．式 (10.18) を使って，われわれは式 (10.3) を証明し，相互作用しているカイラル超対称性理論の生成汎関数について解いた．

生成汎関数を発見したので，いまやファインマン則を導くことができる．はじめに思い出すことはグリーン関数と生成汎関数の関係：

$$\begin{aligned}&G^{(N)}(z^1,\ldots,z^M;z^{M+1},\ldots,z^N)\\&=(-i)^N\frac{\delta}{\delta J_1}\cdots\frac{\delta}{\delta J_M}\frac{\delta}{\delta J^+{}_{M+1}}\cdots\frac{\delta}{\delta J^+{}_N}\sum_{K=0}^{\infty}\frac{(i)^K}{K!}\\&\quad\times\int d^4x^K\mathscr{L}_{int}\left(\frac{\delta}{J_K},\frac{\delta}{J_K{}^+}\right)Z_0[J,J^+]\Big|_{J=J^+=0}\end{aligned} \quad (10.19)$$

である．因子

$$\int d^4x^K\mathscr{L}_{int}\left(\frac{\delta}{J_K},\frac{\delta}{J_K{}^+}\right)$$

が z^K に頂点（vertex）を生成する．$\mathscr{L}_{int}$ の中の微分は，その前の微分と Z_0 自身とに作用する．Z_0 に作用する各微分は，z^K に新しい伝播関数を生成する．前の微分に作用する各微分は，ある伝播関数を z^K に関係付ける．この方法で，新しい頂点の各々は伝播関数で完全に充足される．

具体例として，Φ^3 理論で，二つの新しい伝播関数を点 z に生成する一つの項を考える：

$$
\begin{aligned}
& i \int d^4x\, d^2\theta \left\{ \frac{1}{i} P_2 \frac{\delta}{\delta J(z)} \right\}^3 Z_0 \\
& \quad = i \int d^4x\, d^2\theta \left\{ \frac{1}{i} P_2 \frac{\delta}{\delta J(z)} \right\} \left[\left(-\frac{1}{4}\overline{D}^2 \right) \int d^4x'\, d^4\theta' \frac{-i}{\Box - m^2} \right. \\
& \qquad \left. \times \left(\frac{m}{4} \frac{D^2}{\Box} \delta(z - z')J(z') + \delta(z - z')J^+(z') \right) \right] \\
& \qquad \times \left[\left(-\frac{1}{4}\overline{D}^2 \right) \int d^4x''\, d^4\theta'' \frac{-i}{\Box - m^2} \right. \\
& \qquad \left. \times \left(\frac{m}{4} \frac{D^2}{\Box} d(z - z'')J(z'') + \delta(z - z'')J^+(z'') \right) \right] Z_0 \\
& \quad = i \int d^4x\, d^4\theta \left\{ \frac{1}{i} P_2 \frac{\delta}{\delta J(z)} \right\} \\
& \qquad \times \left[\int d^4x'\, d^4\theta' \frac{-i}{\Box - m^2} \left(\frac{m}{4} \frac{D^2}{\Box} \delta(z - z')J(z') \right. \right. \\
& \qquad \left. \left. + \delta(z - z')J^+(z') \right) \right] \left[\left(-\frac{1}{4}\overline{D}^2 \right) \int d^4x''\, d^4\theta'' \frac{-i}{\Box - m^2} \right. \\
& \qquad \left. \times \left(\frac{m}{4} \frac{D^2}{\Box} \delta(z - z'')J(z'') + \delta(z - z'')J^+(z'') \right) \right] Z_0. \qquad (10.20)
\end{aligned}
$$

ここで，Z_0 に対して式 (10.7)，(10.8) を使った．最後の段（$d^2\theta$ を $d^4\theta$ に変えた）は，各因子のカイラル性から可能である．また，次の事実を使ったことに留意せよ．

$$
\frac{\delta}{\delta J(z)} \int d^4x'\, d^4\theta' \frac{i}{\Box - m^2} \frac{m}{16} \frac{\overline{D}^2 D^2}{\Box} \delta(z - z')J(z') = 0. \qquad (10.21)
$$

このような部分は，ファインマン図表（graph）の閉じた Φ タドポールに対応する．式 (10.21) が実際に消えることの証明は演習 (7) として読者に残してある．

有効作用は，1 粒子既約（1PI）なグリーン関数から計算される．一般に，1PI ダイアグラムは各頂点から出る少なくとも 2 本の内線をもつ．1PI ダイアグラムの外部の足は，逆伝播関数で切断（amputated）される．それから超場振幅 $\Phi(z)$ または $\Phi^+(z)$ が乗じられる．これが，次のファインマン則になる：

(1)　各外線に対して，カイラル超場 $\Phi(z)$ または $\Phi^+(z)$ を書く．

(2)　2（3）本の内線をもつ各 Φ^3 頂点に，1（2）個の内部伝播関数に作用する因子 $-(1/4)D^2$ を含める．各 Φ^{+3} 頂点には類似な因子 $-(1/4)D^2$ を含める．

(3)　各頂点に，因子 $g/3$ を書き，各頂点にわたって積分 $\int d^4x\, d^4\theta$ を実行する．

(4)　内線，$\Phi\Phi$，$\Phi^+\Phi^+$，$\Phi^+\Phi$ に対して，GRS（Grisaru–Roček–Siegel）伝播関数

を使う．それらは式 (10.8) に与えられている．

(5) A^3 理論に対する通常の組合せの因子を勘定せよ．これは式 (10.3)，(10.4) から直接的に最も簡単にできる．

これらの規則を使って，任意の閉じたループのまわりで θ 積分を実行しよう．ファインマン則と GRZ 伝播関数が組み合わさって次の形の表現を与える：

$$(D_1{}^2)^{\ell_1}(\overline{D}_1{}^2)^{k_1}\delta(12)(D_2{}^2)^{\ell_2}(\overline{D}_2{}^2)^{k_2}\delta(23)\cdots(D_n{}^2)^{\ell_n}(\overline{D}_n{}^2)^{k_n}\delta(n1). \tag{10.22}$$

指数 ℓ_i，k_i は 0 または 1 で，$\delta(12)=\delta(\theta_1-\theta_2)\delta(\overline{\theta}_1-\overline{\theta}_2)$ である．一般的なループに対しては，D と $\overline{D}$ 因子は反対の順に現れる．しかし，D^2 と $\overline{D}^2$ の高次は上記の形に縮約され，$\Box$ のべき：

$$\begin{aligned}\overline{D}^2D^2\overline{D}^2&=16\Box\overline{D}^2\\ D^2\overline{D}^2D^2&=16\Box D^2\end{aligned} \tag{10.23}$$

までである．もちろん，有効作用に対しては，上記の表現は，外部の足に対する超場と随伴する閉じたループに対する GRS の伝播関数とが乗じられる．それは，また，$d^4x_1\,d^4\theta_1\cdots d^4x_n\,d^4\theta_n$ 上で積分される．最終的な表現は部分積分によって順次に δ–関数から微分 D と $\overline{D}$ を取り除く計算で得られる．これはループから出る線の上に新しい微分をもち込む．それはまた，最後の δ–関数（$\delta(n1)$ とする）について一定数の微分をもち込む．一つを除くすべての θ–積分は，δ–関数 $\delta(12),\cdots,\delta([n-1]n)$ の助けで実行できる．これが残す因子は，

$$\int d^4\theta_n(D^2)^\ell(\overline{D}^2)^k\delta(\theta_n-\theta_1)\delta(\overline{\theta}_n-\overline{\theta}_1)\Big|_{\substack{\theta_1=\theta_n\\ \overline{\theta}_1=\overline{\theta}_n}}, \tag{10.24}$$

または

$$\int d^4\theta_n(\overline{D}^2)^k(D^2)^\ell\delta(\theta_n-\theta_1)\delta(\overline{\theta}_n-\overline{\theta}_1)\Big|_{\substack{\theta_1=\theta_n\\ \overline{\theta}_1=\overline{\theta}_n}}. \tag{10.25}$$

これらは，$k=\ell=1$ でなければ消える．この場合には，われわれは，式 (9.41) から

$$\int d^4\theta_n D^2\overline{D}^2\delta(\theta_n-\theta_1)\delta(\overline{\theta}_n-\overline{\theta}_1)\Big|_{\substack{\theta_1=\theta_n\\ \overline{\theta}_1=\overline{\theta}_n}}$$

$$= \int d^4\theta_n \overline{D}^2 D^2 \delta(\theta_n - \theta_1)\delta(\overline{\theta}_n - \overline{\theta}_1)\Big|_{\substack{\theta_1=\theta_n \\ \overline{\theta}_1=\overline{\theta}_n}}$$

$$= 16 \int d^4\theta_n \tag{10.26}$$

を得る．θ–空間のループ全体が 1 個の $d^4\theta$ 積分に収縮した．この手続きはいまや次のループに運ばれ，最終的に結果 (10.2) に到達する．各ダイアグラムに対して，式 (10.2) が正しいこと，その結果，ダイアグラムの任意の特定の和に対しても同様に正しいことに注目せよ．

文　　献

M. T. Grisaru, M. Roček, and W. Siegel, Nucl. Phys. **B159**, 429(1979).
B. A. Ovrut and J. Wess, Phys. Rev. **D25**, 409(1982).

重 要 な 式

$$\mathscr{L} = \int d^2\theta\, d^2\overline{\theta}\Phi^+\Phi + \left\{\int d^2\theta \left[\frac{1}{2}m\Phi^2 + \frac{1}{3}g\Phi^3\right] + \text{h.c.}\right\} \tag{10.1}$$

$$Z[J,J^+] = \left\langle 0 \middle| \text{T} \exp i \int d^4\theta\, d^4x \left[J(z)\left(-\frac{1}{4}\frac{D^2}{\Box}\right)\Phi(z) + J^+(z)\left(-\frac{1}{4}\frac{\overline{D}^2}{\Box}\right)\Phi^+(z)\right] \middle| 0 \right\rangle = e^{i\int d^4x \mathscr{L}_{int}(\delta/\delta J, \delta/\delta J^+)} Z_0[J,J^+] \tag{10.3}$$

$$G^{(N)}(z^1,\ldots,z^M;z^{M+1},\ldots,z^N) = (-i)^N \frac{\delta}{\delta J(z^1)}\cdots\frac{\delta}{\delta J(z^M)}\frac{\delta}{\delta J^+(z^{M+1})}\cdots\frac{\delta}{\delta J^+(z^N)} Z[J,J^+]\Big|_{J=J^+=0} \tag{10.4}$$

$$Z_0[J,J^+] = \exp -\frac{i}{2}\int d^4x\, d^4\theta\, d^4x'\, d^4\theta' (J(z), J^+(z))\Delta_{\text{GRS}}(z,z')\begin{pmatrix} J(z') \\ J^+(z') \end{pmatrix} \tag{10.7}$$

$$\Delta_{\rm GRS}(z,z') = \frac{1}{\Box - m^2}\begin{pmatrix} \dfrac{m}{4}\dfrac{D^2}{\Box} & 1 \\ 1 & \dfrac{m}{4}\dfrac{\overline{D}^2}{\Box} \end{pmatrix}\delta(z-z') \tag{10.8}$$

演　　習

(1)　式 (10.2) が超対称的であることを示せ．

(2)　式 (9.18) を用いて，カイラルである Φ と J に対して

$$\int d^4x\, d^4\theta \Phi \left(-\frac{1}{4}D^2\right) J = \int d^4x\, d^2\theta \Phi \Box J$$

を示せ．

(3)　生成汎関数 (10.6) が 2 点関数 (10.5) を与えることを示せ．

(4)　式 $\left[\left(P_1 \dfrac{\delta}{\delta J^+}\right)^n, J^+\right]$ を計算せよ．

(5)　式 (10.16) を証明せよ．

(6)　式 $\delta Z_0/\delta J(z)$ を計算せよ．これを使って式 (10.20) を確認せよ．

(7)　式 (10.21) が実際に消えることを証明せよ．

(8)　ファインマン則を使って，図 9.1 のダイアグラムを計算せよ．(a) と (b) は消えること，(c) は波動関数のくり込み（renormalization）になることを示せ．

11. 非線形表現

本章では，超対称代数の非線形表現を学ぶ．これが，超空間の微分を導入し，微分形への自然な移行を与える．それはまた，超対称性がフェルミオン場だけで完全に表現されることを示す．実際，われわれは，単一のフェルミオン場だけから局所的超対称ラグランジアンを構築する．われわれは，この非線形ラグランジアンが高度にくり込み不可能であることをみる．それは，したがって，くりこみ可能な超対称理論におけるボース–フェルミ対称性の形状を変えない．

フェルミオン場に対する非線形変換は，第 8 章のゴールドストン・スピノルに対する非線形変換の再評価である．われわれは，非線形ラグランジアンが自発的超対称性の破れを引き起こすこと，そしてフェルミオン場が本当にゴールドストン・スピノルであることをみる．非線形ラグランジアンは超重力理論における超対称ヒグス効果を調べるのに非常に役に立つ．超対称ヒグス効果は，スピン–1/2 ゴールドストン・フェルミオンを重力場のスピン–3/2 パートナー場と一緒にして 1 個の有質量スピン–3/2 の場を形成するときに起こる．

非線形変換則を導くために，最初に超対称変換 (4.3)：

$$\begin{aligned} x' &= x + \imath(\theta\sigma\overline{\xi} - \xi\sigma\overline{\theta}) \\ \theta' &= \theta + \xi \\ \overline{\theta}' &= \overline{\theta} + \overline{\xi} \end{aligned} \tag{11.1}$$

を考える．この変換が，スピノル θ，$\overline{\theta}$ 上に非線形表現を引き起こす．われわれは，この変換を $\theta = k\lambda$ なる θ と λ の間の類似性を記述することによって，任意のスピノル場に一般化する：

$$\begin{aligned} \lambda'(x') &= \lambda(x) + \frac{1}{\kappa}\xi \\ \overline{\lambda}'(x') &= \overline{\lambda}(x) + \frac{1}{\kappa}\overline{\xi}. \end{aligned} \tag{11.2}$$

式 (11.2) から，同一の時空点での場の変化を計算できる：

$$\begin{aligned}\delta_\xi \lambda^\alpha &= \lambda'^\alpha(x) - \lambda^\alpha(x) = \frac{1}{\kappa}\xi^\alpha - i\kappa(\lambda\sigma^m\overline{\xi} - \xi\sigma^m\overline{\lambda})\partial_m \lambda^\alpha \\ \delta_\xi \overline{\lambda}_{\dot\alpha} &= \overline{\lambda}'_{\dot\alpha}(x) - \overline{\lambda}_{\dot\alpha}(x) = \frac{1}{\kappa}\overline{\xi}_{\dot\alpha} - i\kappa(\lambda\sigma^m\overline{\xi} - \xi\sigma^m\overline{\lambda})\partial_m \overline{\lambda}_{\dot\alpha}.\end{aligned} \tag{11.3}$$

読者へ演習 (1) として残した，2，3 の代数計算の後，

$$(\delta_\eta\delta_\xi - \delta_\xi\delta_\eta)\lambda^\alpha = -2i(\eta\sigma^m\overline{\xi} - \xi\sigma^m\overline{\eta})\partial_m\lambda^\alpha. \tag{11.4}$$

これは，式 (11.3) が本当に超対称代数 (I) を表現（realize）していることを示している．

不変なラグランジアンを構築する前に，最初に微分 dx，$d\theta$，$d\overline{\theta}$ を調べる．これらは，超空間での一般座標変換のもとで次のように変換する：

$$\begin{aligned}x'^m &= x'^m(x,\theta,\overline{\theta}) \\ \theta'^\mu &= \theta'^\mu(x,\theta,\overline{\theta}) \\ \overline{\theta}'_{\dot\mu} &= \overline{\theta}'_{\dot\mu}(x,\theta,\overline{\theta})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}dx'^m &= dx^n\frac{\partial x'^m}{\partial x^n} + d\theta^\nu\frac{\partial x'^m}{\partial\theta^\nu} + d\overline{\theta}_{\dot\nu}\frac{\partial x'^m}{\partial\overline{\theta}_{\dot\nu}} \\ d\theta'^\mu &= dx^n\frac{\partial \theta'^\mu}{\partial x^n} + d\theta^\nu\frac{\partial \theta'^\mu}{\partial\theta^\nu} + d\overline{\theta}_{\dot\nu}\frac{\partial \theta'^\mu}{\partial\overline{\theta}_{\dot\nu}} \\ d\overline{\theta}'_{\dot\mu} &= dx^n\frac{\partial \overline{\theta}'_{\dot\mu}}{\partial x^n} + d\theta^\nu\frac{\partial \overline{\theta}'_{\dot\mu}}{\partial\theta^\nu} + d\overline{\theta}_{\dot\nu}\frac{\partial \overline{\theta}'_{\dot\mu}}{\partial\overline{\theta}_{\dot\nu}}.\end{aligned} \tag{11.5}$$

ここで，スピノル添字に対する和の表記と，（微分の）係数の左側への微分の配置（微分はその係数の左側に配置）とに注意すべきである．式 (11.1) に対しては，微分は次のようになる．

$$\begin{aligned}dx'^m &= dx^m + id\theta\sigma^m\overline{\xi} - i\xi\sigma^m d\overline{\theta} \\ d\theta'^\mu &= d\theta^\mu \\ d\overline{\theta}'_{\dot\mu} &= d\overline{\theta}_{\dot\mu}.\end{aligned} \tag{11.6}$$

微分の組合せ：

$$\begin{aligned}e^a &= dx^a - id\theta\sigma^a\overline{\theta} + i\theta\sigma^a d\overline{\theta} \\ e^\alpha &= d\theta^\alpha \\ e_{\dot\alpha} &= d\overline{\theta}_{\dot\alpha},\end{aligned} \tag{11.7}$$

これは式 (11.1) と (11.6) のもとで不変：

$$\begin{aligned} e'^a &= dx'^a - id\theta'\sigma^a\overline{\theta}' + i\theta'\sigma^a d\overline{\theta}' \\ &= dx^a + id\theta\sigma^a\overline{\xi} - i\xi\sigma^a d\overline{\theta} - id\theta\sigma^a\overline{\theta} - id\theta\sigma^a\overline{\xi} + i\theta\sigma^a d\overline{\theta} + i\xi\sigma^a d\overline{\theta} \\ &= e^a \end{aligned} \tag{11.8}$$

であることを見つけるのは容易である．$\theta = \kappa\lambda$ と $d\theta = \kappa(\partial\lambda/\partial x^m)dx^m$ とを式 (1.7) に代入してわかるように

$$e^a \to dx^m[\delta_m{}^a - i\kappa^2\partial_m\lambda\sigma^a\overline{\lambda} + i\kappa^2\lambda\sigma^a\partial_m\overline{\lambda}] = dx^m A_m{}^a. \tag{11.9}$$

簡単な計算が示すように

$$\delta_\xi A_m{}^a = i\kappa(\xi\sigma^n\partial_m\overline{\lambda} - \partial_m\lambda\sigma^n\overline{\xi})A_n{}^a - i\kappa(\lambda\sigma^n\overline{\xi} - \xi\sigma^n\overline{\lambda})\partial_n A_m{}^a. \tag{11.10}$$

この変換で，ラグランジアン

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{2\kappa^2}\det A \tag{11.11}$$

は不変作用を与え，

$$\begin{aligned} \delta_\xi \det A &= \det A \ \mathrm{Tr}\ \delta_\xi A A^{-1} \\ &= -i\kappa\partial_m[(\lambda\sigma^m\overline{\xi} - \xi\sigma^m\overline{\lambda})\det A]. \end{aligned} \tag{11.12}$$

式 (11.9) から，われわれは，$\mathscr{L}$ が 1 個の無質量スピノル λ を記述することがわかる：

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{2\kappa^2} - \frac{i}{2}(\lambda\sigma^m\partial_m\overline{\lambda} - \partial_m\lambda\sigma^m\overline{\lambda}) + (\text{相互作用項}). \tag{11.13}$$

定数 κ が自発的に超対称性を破る．それはまた，ラグランジアンのゼロでない真空期待値となる．これは，式 (11.11) が重力場と相互作用するときに宇宙定数を与える．

文　献

D V. Volkov and V P. Akulov, JETP Lett. **16**, 438(1972).
S. Deser and B. Zumino, Phys. Rev. Lett. **38**, 1433(1977).

演　習

(1)　式 (11.3) を用いて次の計算をせよ．

$$\begin{aligned}
\delta_\eta\delta_\xi\lambda = &-i(\eta\sigma^m\overline{\xi}-\xi\sigma^m\overline{\eta})\partial_m\lambda \\
&-\kappa^2\{(\lambda\sigma^m\overline{\xi}-\xi\sigma^m\overline{\lambda})(\lambda\sigma^n\overline{\eta}-\eta\sigma^n\overline{\lambda})\partial_m\partial_n\lambda \\
&+(\lambda\sigma^m\overline{\xi}-\xi\sigma^m\overline{\lambda})(\partial_m\lambda\sigma^n\overline{\eta}-\eta\sigma^n\partial_m\overline{\lambda})\partial_n\lambda \\
&+(\lambda\sigma^n\overline{\eta}-\eta\sigma^n\overline{\lambda})(\partial_n\lambda\sigma^m\overline{\xi}-\xi\sigma^m\partial_n\overline{\lambda})\partial_m\lambda\}.
\end{aligned}$$

式 (11.3) で λ の 2 次の項は，引数 x の変位からくることに注意せよ．関係 (11.4) を証明せよ．

(2)　超空間での一般的変換

$$\begin{aligned}
x^m &= x^m(x',\theta',\overline{\theta}') \\
\theta^\mu &= \theta^\mu(x',\theta',\overline{\theta}') \\
\overline{\theta}_{\dot{\mu}} &= \overline{\theta}_{\dot{\mu}}(x',\theta',\overline{\theta}')
\end{aligned}$$

が，偏微分上に次の変換を引き起こす．

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x'^m} &= \frac{\partial x^n}{\partial x'^m}\frac{\partial}{\partial x^n}+\frac{\partial\theta^\nu}{\partial x'^m}\frac{\partial}{\partial\theta^\nu}+\frac{\partial\overline{\theta}_{\dot{\nu}}}{\partial x'^m}\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}_{\dot{\nu}}} \\
\frac{\partial}{\partial\theta'^\mu} &= \frac{\partial x^n}{\partial\theta'^\mu}\frac{\partial}{\partial x^n}+\frac{\partial\theta^\nu}{\partial\theta'^\mu}\frac{\partial}{\partial\theta^\nu}+\frac{\partial\overline{\theta}_{\dot{\nu}}}{\partial\theta'^\mu}\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}_{\dot{\nu}}} \\
\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}'_{\dot{\mu}}} &= \frac{\partial x^n}{\partial\overline{\theta}'_{\dot{\mu}}}\frac{\partial}{\partial x^n}+\frac{\partial\theta^\nu}{\partial\overline{\theta}'_{\dot{\mu}}}\frac{\partial}{\partial\theta^\nu}+\frac{\partial\overline{\theta}_{\dot{\nu}}}{\partial\overline{\theta}'_{\dot{\mu}}}\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}_{\dot{\nu}}}.
\end{aligned}$$

これと式 (11.5) とから

$$dx^m\frac{\partial}{\partial x^m}+d\theta^\mu\frac{\partial}{\partial\theta^\mu}+d\overline{\theta}_{\dot{\mu}}\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}_{\dot{\mu}}}=dx'^m\frac{\partial}{\partial x'^m}+d\theta'^\mu\frac{\partial}{\partial\theta'^\mu}+d\overline{\theta}'_{\dot{\mu}}\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}'_{\dot{\mu}}}$$

を示せ．

(3)　式 (11.7) の e^a，e^α，$e_{\dot{\alpha}}$ を次の形に書け．

$$\begin{aligned}
e^a &= dx^m e_m{}^a + d\theta^\mu e_\mu{}^a + d\overline{\theta}_{\dot{\mu}}e^{\dot{\mu}a} \\
e^\alpha &= dx^m e_m{}^\alpha + d\theta^\mu e_\mu{}^\alpha + d\overline{\theta}_{\dot{\mu}}e^{\dot{\mu}\alpha} \\
e_{\dot{\alpha}} &= dx^m e_{m\dot{\alpha}} + d\theta^\mu e_{\mu\dot{\alpha}} + d\overline{\theta}_{\dot{\mu}}e^{\dot{\mu}}{}_{\dot{\alpha}}.
\end{aligned}$$

次式を示せ．

$$
\begin{aligned}
&e_m{}^a = \delta_m{}^a, \quad && e_\mu{}^a = -i\sigma_{\mu\dot{\mu}}{}^a\overline{\theta}^{\dot{\mu}}, \quad && e^{\dot{\mu}a} = -i\overline{\sigma}^{a\dot{\mu}\mu}\theta_\mu \\
&e_m{}^\alpha = 0, && e_\mu{}^\alpha = \delta_\mu{}^\alpha, && e^{\dot{\mu}\alpha} = 0 \\
&e_{m\dot{\alpha}} = 0, && e_{\mu\dot{\alpha}} = 0, && e^{\dot{\mu}}{}_{\dot{\alpha}} = \delta^{\dot{\mu}}{}_{\dot{\alpha}}.
\end{aligned}
$$

(4)　次の計算をせよ．

$$
\begin{aligned}
\delta_\xi A_b{}^a = {} & i\kappa(\xi\sigma^a\partial_b\overline{\lambda} - \partial_b\lambda\sigma^a\overline{\xi}) \\
& +\kappa^3(\lambda\sigma^m\overline{\xi} - \xi\sigma^m\overline{\lambda})\partial_m(\lambda\sigma^a\partial_b\overline{\lambda} - \partial_b\lambda\sigma^a\overline{\lambda}) \\
& +\kappa^3(\partial_b\lambda\sigma^m\overline{\xi} - \xi\sigma^m\partial_b\overline{\lambda})(\lambda\sigma^a\partial_m\overline{\lambda} - \partial_m\lambda\sigma^a\overline{\lambda}).
\end{aligned}
$$

これを用いて，式 (11.10) を示せ．

(5)　$\partial/\partial x^m \ \det A = \det A \ \mathrm{Tr} \ \partial_m A A^{-1}$ を使って式 (11.12) を証明せよ．

12. 超空間における微分形式

超重力理論は，超空間中の微分形式によってうまく定式化できた．超対称変換は，超空間の一般座標変換なのでこれは驚きではない．したがって，超重力理論をこのような座標変換に対して明白に共変的な方法で導入することは自然である．これが，微分形式の概念を超空間に拡大させることになる．

超空間の元は，

$$z^M \sim (x^m, \theta^\mu, \bar{\theta}_{\dot{\mu}}) \tag{12.1}$$

で表される．大文字の M は 4 元ベクトル m とスピノル添字 μ，$\dot{\mu}$ を表す．M，m，μ はすべて上付の添字で，$\dot{\mu}$ は下付の添字である．超空間の元は次の乗法に従う．

$$z^M z^N = (-)^{nm} z^N z^M. \tag{12.2}$$

ここで，n は N の関数，m は M の関数である．これらの関数は，0 か 1 の値をとり，それは M と N がベクトル添字かスピノル添字かで決まる．

超空間での外積は，通常の空間との完全な類似性から定義され，

$$\begin{aligned} dz^M \wedge dz^N &= -(-)^{nm} dz^N \wedge dz^M \\ dz^M z^N &= (-)^{nm} z^N dz^M. \end{aligned} \tag{12.3}$$

この定義で，微分形式は超空間に明確に拡大され，

$$\Omega = dz^{M_1} \wedge \cdots \wedge dz^{M_p} W_{M_p \cdots M_1}(z). \tag{12.4}$$

微分はその係数関数の左に書かれ，添字は足し上げられる添字の間の偶数個が表記される．今後，われわれは，外積の記号 $\wedge$ は省略する．微分形式を掛けるほかの方法を知らないので曖昧さはない．

超空間の変数 z の関数は 0–形式（zero-form）：

$$F(z) \tag{12.5}$$

とよばれる．1–形式は次のように書かれる，

$$\Lambda = dz^M W_M(z) = dx^m W_m(z) + d\theta^\mu W_\mu(z) + d\bar{\theta}_{\dot{\mu}} \overline{W}^{\dot{\mu}}(z). \tag{12.6}$$

一方，式 (12.4) の Ω は p–形式である．定義 (12.3) が混合した対称性の係数関数へ導く．したがって，通常の場合と異なり，それより上のすべての形式がゼロであるような p の値はない．

われわれは，係数関数で奇数個のスピノル添字をもつものを性質がフェルミオン的，偶数個のスピノル添字をもつものをボソン的と常に仮定する．これらの割振りが，形式の乗法についてよく知られている規則を再現する：

$$\begin{aligned}(c_1\Lambda_1 + c_2\Lambda_2)\Omega &= c_1\Lambda_1\Omega + c_2\Lambda_2\Omega \\ \Lambda\Omega &= (-)^{pq}\Omega\Lambda \\ \Lambda(\Omega\Xi) &= (\Lambda\Omega)\Xi.\end{aligned} \tag{12.7}$$

ここで，Λ は p–形式，Ω は q–形式である．

超空間形式を定義したので，外微分を導入しなければならない．外微分は，0–形式を 1–形式に写像（map）する．

$$dF = dz^M \frac{\partial}{\partial z^M} F = dz^M \partial_M F. \tag{12.8}$$

そして，p–形式を $(p+1)$–形式に写像する．

$$\begin{aligned}\Omega &= dz^{M_1} \cdots dz^{M_p} W_{M_p \cdots M_1}(z) \\ d\Omega &= dz^{M_1} \cdots dz^{M_p} dz^N \frac{\partial}{\partial z^N} W_{M_p \cdots M_1}(z).\end{aligned} \tag{12.9}$$

一般に，外微分は次の性質をもつ：

$$\begin{aligned}d(\Omega + \Sigma) &= d\Omega + d\Sigma \\ d(\Omega\Sigma) &= \Omega d\Sigma + (-)^q d\Omega\Sigma \\ dd &= 0.\end{aligned} \tag{12.10}$$

ここで，Σ は q–形式である．式 (12.8)，(12.10) は式 (12.3)，(12.4)，(12.9) からただちに求められる．あるいは，外微分を式 (12.8) と式 (12.10) から定義することができる．これは，演習 (5) である．

微分形式と外微分で書かれている式は，座標変化（change）に対して共変的である．これをみるために，y と z が超空間座標の 2 組を表すとしよう．

$$y^M = y^M(z). \tag{12.11}$$

y の関数は，z の関数への自然な写像がある：

$$F(y) = F(y(z)) = \phi^* F(z). \tag{12.12}$$

もし，y と z が超空間の同一の点を表示しているとすれば，式 (12.12) の $\phi^* F$ の定義が，ある量が表示法とは無関係に同一点では同じ値をとることを保証する．類似の流れで，ϕ^* が二つの座標系における p–形式の間に自然な写像を引き起こす．

$$\begin{aligned}
\Omega(y) &= dy^{M_1} \cdots dy^{M_p} W_{M_p \cdots M_1}(y) \\
&= \left(dz^{N_1} \frac{\partial y^{M_1}}{\partial z^{N_1}} \cdots dz^{N_p} \frac{\partial y^{M_p}}{\partial z^{N_p}} \right) W_{M_p \cdots M_1}(y(z)) \\
&= dz^{N_1} \cdots dz^{N_p} \phi^* W_{N_p \cdots N_1}(z) \\
&= \phi^* \Omega(z).
\end{aligned} \tag{12.13}$$

写像 ϕ^* は次の性質をもっている．

(1) $\phi^*(\Omega + \Sigma) = \phi^*\Omega + \phi^*\Sigma$

(2) $\phi^*(\Omega\Sigma) = (\phi^*\Omega)(\phi^*\Sigma)$

(3) $d(\phi^*\Omega) = \phi^*(d\Omega)$. (12.14)

(1)，(2) の証明は，そのまま直接である．(3) の証明は，演習 (10) である．これらの性質が，微分形式と外微分に基づく形式が座標変化に対して自動的に共変的であるようにする．

写像 (12.12) と (12.13) が，無限小の座標変換：

$$z^M = y^M + \xi^M \tag{12.15}$$

に対して，簡単になる．特に，0–形式に対しては，

$$\begin{aligned}\delta F(z) &= \phi^* F(z) - F(z) \\ &= -\xi^L \partial_L F(z).\end{aligned} \tag{12.16}$$

そして，1–形式に対しては，

$$\begin{aligned}\delta W_M(z) &= \phi^* W_M(z) - W_M(z) \\ &= -\xi^L \partial_L W_M(z) - \frac{\partial \xi^L}{\partial z^M} W_L(z)\end{aligned} \tag{12.17}$$

となることがわかる．これらの表現は，任意の p–形式 Ω に対して容易に一般化できる．

ゲージ理論は，一般座標変換に対してのみ共変的であるだけではない．それらは，局所的構造群に対しても共変的でなければならない．これは，ヤン–ミルズ理論のための有限リー群と重力理論のためのローレンツ群である．一般に，微分形式はこの群の表現を張る：

$$\begin{aligned}\Omega'^a &= \Omega^b X_b{}^a(z) \\ \Omega' &= \Omega X\end{aligned} \tag{12.18}$$

添字 a は，1 から L まで走る．L は群の表現 X の次元である．

構造群の表現のもとで線形に変換するものを，テンソルとよぶ．外微分はテンソルをテンソルに変換しないことに注目せよ：

$$d\Omega' = \Omega dX + d\Omega X. \tag{12.19}$$

非同次項 ΩdX を打ち消すように接続（connection）を導入しなければならない．接続はリー代数値 1–形式，

$$\phi = dz^M \phi_M{}^r(z) i T^r \tag{12.20}$$

で，次の変換則に従う：

$$\phi' = X^{-1} \phi X - X^{-1} dX. \tag{12.21}$$

式 (12.20) で，行列 T は構造群のエルミート生成子（generator）で，r は代数の次元上を走る．

接続が，p–形式 Ω に対して共変微分

$$\mathscr{D}\Omega = d\Omega + \Omega\phi, \tag{12.22}$$

あるいは，よりあらわに，

$$\begin{aligned}\mathscr{D}\Omega &= dz^N \mathscr{D}_N \Omega \\ &= dz^{M_1} \cdots dz^{M_p} dz^N \frac{\partial}{\partial z^N} W_{M_p \cdots M_1}(z) \\ &\quad + dz^{M_1} \cdots dz^{M_p} dz^N \phi_N{}^r W_{M_p \cdots M_1}(z) iT^r\end{aligned} \tag{12.23}$$

を定義することを可能にする．共変微分は p–形式を $(p+1)$–形式に，テンソルをテンソルに写像する．

$$\begin{aligned}\mathscr{D}\Omega' &= d\Omega' + \Omega'\phi' \\ &= \Omega dX + d\Omega X + \Omega X(X^{-1}\phi X - X^{-1}dX) \\ &= (d\Omega + \Omega\phi)X \\ &= (\mathscr{D}\Omega)X.\end{aligned} \tag{12.24}$$

接続とその微分から構成される 1 個のテンソルがある．それは曲率テンソル：

$$F = d\phi + \phi\phi \tag{12.25}$$

とよばれる．曲率テンソルは，リー代数値 2–形式：

$$\begin{aligned}F &= \frac{1}{2} dz^M dz^N F_{NM}(z) \\ F_{NM}(z) &= F_{NM}{}^r(z) iT^r\end{aligned} \tag{12.26}$$

である．その変換則は演習 (8) で計算され：

$$F' = X^{-1} F X \tag{12.27}$$

である．曲率形式とテンソルの共変微分だけが，一般に，微分をとることによって構成されるテンソル量である．高次微分は，$dd = 0$ の事実から，恒等式を導く（新しいテンソルにはならない）．これらの恒等式は，ビアンキ恒等式とよばれる．

第 1 型ビアンキ恒等式は共変微分：

$$
\begin{aligned}
d\mathscr{D}\Omega &= \Omega d\phi - d\Omega\phi \\
&= \Omega(F - \phi\phi) - (\mathscr{D}\Omega - \Omega\phi)\phi \\
&= \Omega F - \mathscr{D}\Omega\phi
\end{aligned}
\tag{12.28}
$$

から見つかる．これらは次の形に書き直せる：

$$
\begin{aligned}
\mathscr{D}\mathscr{D}\Omega &= \Omega F \\
dz^M dz^N \mathscr{D}_N \mathscr{D}_M \Omega &= \frac{1}{2} dz^M dz^N F_{NM}{}^r \Omega i T^r .
\end{aligned}
\tag{12.29}
$$

第 2 型ビアンキ恒等式は曲率形式 (12.25) から見つかり：

$$
\begin{aligned}
dF &= \phi d\phi - d\phi\phi \\
&= \phi(F - \phi\phi) - (F - \phi\phi)\phi \\
&= \phi F - F\phi .
\end{aligned}
\tag{12.30}
$$

これから，

$$\mathscr{D}F = 0. \tag{12.31}$$

または，係数関数では，

$$dz^M dz^N dz^L \mathscr{D}_L F_{NM} = 0 \tag{12.32}$$

であることがわかる．添字のすべての置換について和をとり，$F_{NM} = -(-)^{mn} F_{MN}$ を使って，次の結果を得る．

$$\mathscr{D}_L F_{NM} + (-)^{\ell(n+m)} \mathscr{D}_N F_{ML} + (-)^{m(n+\ell)} \mathscr{D}_M F_{LN} = 0. \tag{12.33}$$

これは，曲率についての通常の巡回的恒等式の超空間一般化である．

文　献

H. Flanders, "Differential Forms," New York, Academic Press (1963).
F. A. Berezin, Sov. J. Nucl. Phys. **30**, 605 (1979).

重要な式

$$z^M \sim (x^m, \theta^\mu, \bar{\theta}_{\dot{\mu}}) \tag{12.1}$$

$$z^M z^N = (-)^{nm} z^N z^M \tag{12.2}$$

$$\begin{aligned} dz^M \wedge dz^N &= -(-)^{nm} dz^N \wedge dz^M \\ dz^M z^N &= (-)^{nm} z^N dz^M \end{aligned} \tag{12.3}$$

$$\Omega = dz^{M_1} \wedge \cdots \wedge dz^{M_p} W_{M_p \cdots M_1}(z) \tag{12.4}$$

$$\begin{aligned} (c_1\Lambda_1 + c_2\Lambda_2)\Omega &= c_1\Lambda_1\Omega + c_2\Lambda_2\Omega \\ \Lambda\Omega &= (-)^{pq}\Omega\Lambda \\ \Lambda(\Omega\Xi) &= (\Lambda\Omega)\Xi \end{aligned} \tag{12.7}$$

$$d\Omega = dz^{M_1} \cdots dz^{M_p} dz^N \frac{\partial}{\partial z^N} W_{M_p \cdots M_1}(z) \tag{12.9}$$

$$\begin{aligned} d(\Omega + \Sigma) &= d\Omega + d\Sigma \\ d(\Omega\Sigma) &= \Omega d\Sigma + (-)^q d\Omega\Sigma \\ dd &= 0 \end{aligned} \tag{12.10}$$

$$\Omega' = \Omega X \tag{12.18}$$

$$\phi' = X^{-1}\phi X - X^{-1}dX \tag{12.21}$$

$$\mathscr{D}\Omega = d\Omega + \Omega\phi \tag{12.22}$$

$$\mathscr{D}\Omega' = (\mathscr{D}\Omega)X \tag{12.24}$$

$$F = d\phi + \phi\phi \tag{12.25}$$

$$F' = X^{-1}FX \tag{12.27}$$

$$\mathscr{D}\mathscr{D}\Omega = \Omega F$$

$$dz^M dz^N \mathscr{D}_N \mathscr{D}_M \Omega = \frac{1}{2} dz^M dz^N F_{NM}{}^r \Omega i T^r \tag{12.29}$$

$$\mathscr{D} F = 0 \tag{12.31}$$

$$dz^M dz^N dz^L \mathscr{D}_L F_{NM} = 0 \tag{12.32}$$

演　　習

(1)　通常の n 次元多様対上の p–形式は，一つの $\binom{n}{p}$ 次元線形空間を張ることを示せ．

(2)　三次元では，$dd=0$ が $\nabla \times \nabla \cdot = 0$ と $\nabla \cdot \nabla \times = 0$ を意味することを示せ．

(3)　次式を証明せよ．

$$\frac{\partial}{\partial z^M} z^N = (-)^{nm} z^N \frac{\partial}{\partial z^M} + \delta_M{}^N$$
$$\frac{\partial}{\partial z^M} \frac{\partial}{\partial z^N} = (-)^{nm} \frac{\partial}{\partial z^N} \frac{\partial}{\partial z^M}.$$

(4)　演習 (3) を使って，超空間の形式 (12.9) に対して $dd=0$ が成り立つことを示せ．

(5)　式 (12.8) と式 (12.10) が $d\Omega$ を式 (12.9) のように定義することを示せ．

(6)　変換 (12.21) のもとで，接続 ϕ がリー代数値のままであることを調べよ．

(7)　もし，ϕ がリー代数値ならば，式 (12.25) は，F もまたリー代数値であることを意味していることを示せ．

(8)　曲率 F が，構造群のもとでテンソル (12.27) のように変換することを示せ．

(9)　$\mathscr{D}\mathscr{D}\Omega = \Omega F$ が，

$$(\mathscr{D}_N \mathscr{D}_M - (-)^{nm} \mathscr{D}_M \mathscr{D}_N) W(z) = W F_{NM}$$

を与えることを示せ．ただし，W は 0–形式である．

(10)　任意の p–形式 Ω に対して $\phi^*\Omega$，$d(\phi^*\Omega)$，$d\Omega$，$\phi^*(d\Omega)$ を計算せよ．
$d(\phi^*\Omega) = \phi^*(d\Omega)$ を証明せよ．

13. ゲージ理論再訪

超重力理論の勉強を始める前に，われわれは，微分形式の言葉で超対称ゲージ理論を調べる．われわれは，以前の結果を再現して幾何学的方法の信頼性を獲得する．可能なかぎり常に，後で超重力理論を定式化する際にとる手続きを踏むこととする．この方法で，われわれは超対称ゲージ理論を超重力理論の模型として扱う．

前章で，われわれは超空間における微分形式と外微分を導入した．われわれは，超空間微分 dz^M を自然な基底として用いた．しかし，われわれは，ほかの任意の基底

$$dz^M E_M{}^A(z) \tag{13.1}$$

を選ぶことができたであろう．ここで $E_M{}^A(z)$ は超空間の任意の可逆な関数

$$\begin{aligned} E_M{}^A(z) E_A{}^N(z) &= \delta_M{}^N \\ E_A{}^N(z) E_N{}^B(z) &= \delta_A{}^B, \end{aligned} \tag{13.2}$$

また，

$$\delta_M{}^N = \begin{pmatrix} \delta_m{}^n & 0 & 0 \\ 0 & \delta_\mu{}^\nu & 0 \\ 0 & 0 & \delta^{\dot\mu}{}_{\dot\nu} \end{pmatrix} \tag{13.3}$$

である．式 (13.3) では，点付添字の位置に留意することが重要である．

dz 基底が超対称性にとって特別に便利というわけではない．なぜならば，外微分

$$dz^M \frac{\partial}{\partial z^M} \tag{13.4}$$

が，超場を超場に写像しないからである．これは，微分演算子 $\partial/\partial z$ が超対称性生成子 (4.4) と交換しないからである．より自然な基底は，超対称共変微分

$$D_a = \frac{\partial}{\partial x^a}$$

$$D_\alpha = \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} + i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}{}^m \overline{\theta}^{\dot{\alpha}} \frac{\partial}{\partial x^m}$$
$$\overline{D}^{\dot{\alpha}} = \frac{\partial}{\partial\overline{\theta}_{\dot{\alpha}}} + i\theta^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\beta}}{}^m \varepsilon^{\dot{\beta}\dot{\alpha}} \frac{\partial}{\partial x^m} \tag{13.5}$$

で定義される．これらの微分演算子は超対称性生成子と交換し

$$\{D_\alpha, Q_\beta\} = \{D_\alpha, \overline{Q}^{\dot{\beta}}\} = \{\overline{D}^{\dot{\alpha}}, Q_\beta\} = \{\overline{D}^{\dot{\alpha}}, \overline{Q}^{\dot{\beta}}\} = 0 \tag{13.6}$$

となり，超場を超場に写像する．

外微分は微分演算子 (13.6) で書くことができて，そのために新しい基底

$$e^A(z) = dz^M e_M{}^A(z) \tag{13.7}$$

を，

$$dz^M \frac{\partial}{\partial z^M} = e^A D_A = dz^M e_M{}^A e_A{}^N \frac{\partial}{\partial z^N}, \tag{13.8}$$

のように導入する．ここで

$$D_A = e_A{}^N \frac{\partial}{\partial z^N}. \tag{13.9}$$

行列 $e_A{}^M$ は式 (13.5) から直接求めることができて

$$e_A{}^M = \begin{pmatrix} e_a{}^m = \delta_a{}^m & e_a{}^\mu = 0 & e_{a\dot{\mu}} = 0 \\ e_\alpha{}^m = i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}{}^m \overline{\theta}^{\dot{\alpha}} & e_\alpha{}^\mu = \delta_\alpha{}^\mu & e_{\alpha\dot{\mu}} = 0 \\ e^{\dot{\alpha}m} = i\theta^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\beta}}{}^m \varepsilon^{\dot{\beta}\dot{\alpha}} & e^{\dot{\alpha}\mu} = 0 & e^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\mu}} = \delta^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\mu}} \end{pmatrix}. \tag{13.10}$$

この逆行列は

$$e_M{}^A = \begin{pmatrix} e_m{}^a = \delta_m{}^a & e_m{}^\alpha = 0 & e_{m\dot{\alpha}} = 0 \\ e_\mu{}^a = -i\sigma_{\mu\dot{\mu}}{}^a \overline{\theta}^{\dot{\mu}} & e_\mu{}^\alpha = \delta_\mu{}^\alpha & e_{\mu\dot{\alpha}} = 0 \\ e^{\dot{\mu}a} = -i\theta^\rho \sigma_{\rho\dot{\nu}}{}^a \varepsilon^{\dot{\nu}\dot{\mu}} & e^{\dot{\mu}\alpha} = 0 & e^{\dot{\mu}}{}_{\dot{\alpha}} = \delta^{\dot{\mu}}{}_{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \tag{13.11}$$

で与えられる．

これらの行列は，超対称平坦空間を定義する．しかし，基底の形式の外微分は消えないことに留意せよ．

$$\begin{aligned} de^A &= dz^M dz^N \frac{\partial}{\partial z^N} e_M{}^A(z) \\ de^a &= -2ie^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}{}^a e^{\dot{\alpha}} \\ de^\alpha &= 0 \\ de_{\dot{\alpha}} &= 0. \end{aligned} \tag{13.12}$$

これが，平坦空間基底で払われなければならない代価である．ゲージ理論を議論するために接続 ϕ を導入しなければならない．通常通り，接続はリー代数値 1–形式：

$$\begin{aligned} \phi &= dz^M \phi_M = e^A \phi_A \\ \phi_A &= \phi_A{}^r iT^r \end{aligned} \tag{13.13}$$

である．通常のゲージ理論との関係を付けるために次の要求をする．

$$\phi_m{}^r|_{\theta=\bar{\theta}=0} = v_m{}^r. \tag{13.14}$$

場 v_m はなじみのヤン–ミルズ・ベクトルポテンシャルである．

曲率 2–形式は式 (12.25) と同様に定義され：

$$\begin{aligned} F &= d\phi + \phi\phi \\ &= \frac{1}{2} dz^M dz^N F_{NM} \\ &= \frac{1}{2} e^A e^B F_{BA}. \end{aligned} \tag{13.15}$$

平坦空間基底では，これは，

$$\begin{aligned} F &= e^A e^B D_B \phi_A + de^A \phi_A + e^A \phi_A e^B \phi_B \\ &= de^A \phi_A + \frac{1}{2} e^A e^B [D_B \phi_A - (-)^{ab} D_A \phi_B - \phi_B \phi_A + (-)^{ab} \phi_A \phi_B] \end{aligned} \tag{13.16}$$

となる．

係数関数 F_{BA} をそのローレンツ共変成分に分解してよくて，

$$\begin{aligned} F_{ba} &= \partial_b \phi_a - \partial_a \phi_b - [\phi_b, \phi_a] \\ F_{b\alpha} &= \partial_b \phi_\alpha - D_\alpha \phi_b - [\phi_b, \phi_\alpha] \\ F_{b\dot{\alpha}} &= \partial_b \phi_{\dot{\alpha}} - \overline{D}_{\dot{\alpha}} \phi_b - [\phi_b, \phi_{\dot{\alpha}}] \\ F_{\beta\alpha} &= D_\beta \phi_\alpha + D_\alpha \phi_\beta - \{\phi_\beta, \phi_\alpha\} \\ F_{\dot{\beta}\dot{\alpha}} &= \overline{D}_{\dot{\beta}} \phi_{\dot{\alpha}} + \overline{D}_{\dot{\alpha}} \phi_{\dot{\beta}} - \{\phi_{\dot{\beta}}, \phi_{\dot{\alpha}}\} \\ F_{\beta\dot{\alpha}} &= D_\beta \phi_{\dot{\alpha}} + \overline{D}_{\dot{\alpha}} \phi_\beta - \{\phi_\beta, \phi_{\dot{\alpha}}\} + 2i\sigma_{\beta\dot{\alpha}}{}^a \phi_a. \end{aligned} \tag{13.17}$$

ここで，

$$F_{ba}|_{\theta=\bar{\theta}=0} = v_{ba}{}^r iT^r \tag{13.18}$$

に留意せよ．

ビアンキ恒等式もまた，それらのローレンツ共変成分に分解してよい．特に，

$$\begin{aligned} &\mathscr{D}F = 0 \\ &\mathscr{D}F = \frac{1}{2}e^A e^B e^C \mathscr{D}_C F_{BA} + \frac{1}{2}e^A de^B F_{BA} - \frac{1}{2}de^A e^B F_{BA} \end{aligned} \tag{13.19}$$

は，

$$\begin{aligned} &(1) \quad \mathscr{D}_c F_{ba} + \mathscr{D}_b F_{ac} + \mathscr{D}_a F_{cb} = 0 \\ &(2) \quad \mathscr{D}_\alpha F_{bc} + \mathscr{D}_b F_{c\alpha} + \mathscr{D}_c F_{\alpha b} = 0 \\ &(3) \quad \overline{\mathscr{D}}_{\dot\alpha} F_{bc} + \mathscr{D}_b F_{c\dot\alpha} + \mathscr{D}_c F_{\dot\alpha b} = 0 \\ &(4) \quad \mathscr{D}_c F_{\beta\alpha} + \mathscr{D}_\beta F_{\alpha c} - \mathscr{D}_\alpha F_{c\beta} = 0 \\ &(5) \quad \mathscr{D}_c F_{\dot\beta\dot\alpha} + \overline{\mathscr{D}}_{\dot\beta} F_{\dot\alpha c} - \overline{\mathscr{D}}_{\dot\alpha} F_{c\dot\beta} = 0 \\ &(6) \quad \mathscr{D}_c F_{\dot\beta\alpha} + \overline{\mathscr{D}}_{\dot\beta} F_{\alpha c} - \mathscr{D}_\alpha F_{c\dot\beta} + 2i\sigma_{\alpha\dot\beta}{}^a F_{ac} = 0 \\ &(7) \quad \mathscr{D}_\gamma F_{\beta\alpha} + \mathscr{D}_\beta F_{\alpha\gamma} + \mathscr{D}_\alpha F_{\gamma\beta} = 0 \\ &(8) \quad \overline{\mathscr{D}}_{\dot\gamma} F_{\beta\alpha} + \mathscr{D}_\beta F_{\alpha\dot\gamma} + \mathscr{D}_\alpha F_{\dot\gamma\beta} + 2i\sigma_{\beta\dot\gamma}{}^a F_{a\alpha} + 2i\sigma_{\alpha\dot\gamma}{}^a F_{a\beta} = 0 \\ &(9) \quad \mathscr{D}_\gamma F_{\dot\beta\dot\alpha} + \overline{\mathscr{D}}_{\dot\beta} F_{\dot\alpha\gamma} + \overline{\mathscr{D}}_{\dot\alpha} F_{\gamma\dot\beta} + 2i\sigma_{\gamma\dot\beta}{}^a F_{a\dot\alpha} + 2i\sigma_{\gamma\dot\alpha}{}^a F_{a\dot\beta} = 0 \\ &(10) \quad \overline{\mathscr{D}}_{\dot\gamma} F_{\dot\beta\dot\alpha} + \overline{\mathscr{D}}_{\dot\beta} F_{\dot\alpha\dot\gamma} + \overline{\mathscr{D}}_{\dot\alpha} F_{\dot\gamma\dot\beta} = 0 \end{aligned} \tag{13.20}$$

を与える．式 (13.20) で，微分 $\mathscr{D}$ は，完全なゲージ共変微分である．

F の各テンソル成分は，完全な超場多重項を表す．これらの多重項は，非常に多くの成分場を含む．成分場のほとんどは，役に立たず，拘束方程式で消去されなければならない．拘束式はゲージ共変的，ローレンツ共変的，超対称的，でなければならない．加えて，それらが成分場の x–依存性を制限してはいけない．

拘束の適切な組を見つけることは簡単ではない．

$$F_{\alpha\beta} = F_{\dot\alpha\dot\beta} = F_{\alpha\dot\beta} = 0 \tag{13.21}$$

が正しい結果である．この拘束に従ってビアンキ恒等式を解く．そうしなければ，式 (13.17) が最も一般的な解になったであろう．

式 (13.20) 中の，式 (7)，(10) は，拘束のために自動的に満たされる．恒等式 (8) は，しかし，F に対してさらに拘束：

$$\sigma_{\alpha\dot\beta}{}^a F_{a\beta} + \sigma_{\beta\dot\beta}{}^a F_{a\alpha} = 0 \tag{13.22}$$

を生じる．ベクトル・スピノル F_{ab} は，スピン–3/2 とスピン–1/2 の成分を含む．式 (13.22) は，スピン–3/2 成分が消えることを意味していて：

$$\begin{aligned} F_{a\alpha} &= -i\sigma_{a\alpha\dot\beta}\overline{W}^{\dot\beta} \\ \overline{W}^{\alpha} &= -\frac{i}{4}\overline{\sigma}^{a\alpha\alpha}F_{a\alpha} \end{aligned} \tag{13.23}$$

である．恒等式 (9) も類似な結果，

$$\begin{aligned} F_{a\alpha} &= -iW^{\beta}\sigma_{a\beta\dot\alpha} \\ W^{\alpha} &= -\frac{i}{4}F_{a\dot\alpha}\overline{\sigma}^{a\dot\alpha\alpha} \end{aligned} \tag{13.24}$$

を与えるが，一方で，恒等式 (6) は F_{ab} が W と $\overline{W}$ を用いて表せ：

$$\begin{aligned} F_{ab} &= -\frac{i}{4}\overline{\sigma}_a{}^{\dot\beta\alpha}(\overline{\mathscr{D}}_{\dot\beta}F_{\alpha b} + \mathscr{D}_\alpha F_{\dot\beta b}) \\ &= \frac{1}{4}(\overline{\mathscr{D}}\,\overline{\sigma}_a\sigma_b\overline{W} - \mathscr{D}\,\sigma_a\overline{\sigma}_bW) \end{aligned} \tag{13.25}$$

となることを示している．F_{ab} の反対称性を使って

$$\overline{\mathscr{D}}\,\overline{W} - \mathscr{D}W = 0. \tag{13.26}$$

したがって，

$$F_{ab} = \frac{1}{2}(\overline{\mathscr{D}}\,\overline{\sigma}_{ab}\overline{W} - \mathscr{D}\,\sigma_{ab}W) \tag{13.27}$$

を得る．恒等式 (5) は，W に対するもう一つの拘束：

$$(\sigma_{\beta\dot\alpha}{}^{c}\overline{\mathscr{D}}_{\dot\beta} + \sigma_{\beta\dot\beta}{}^{c}\overline{\mathscr{D}}_{\dot\alpha})W^{\beta} = 0 \tag{13.28}$$

になる．$\overline{\sigma}^{c\dot\sigma\sigma}$ で縮約し，式 (A.12) を用いると，

$$(\delta_{\dot\alpha}{}^{\dot\sigma}\overline{\mathscr{D}}_{\dot\beta} + \delta_{\dot\beta}{}^{\dot\sigma}\overline{\mathscr{D}}_{\dot\alpha})W^{\sigma} = 0 \tag{13.29}$$

を得る．$\dot\alpha$ と $\dot\sigma$ にわたって加えると，

$$\overline{\mathscr{D}}_{\dot\alpha}W_{\sigma} = 0 \tag{13.30}$$

となる．

恒等式 (4) からも，類似の結果

$$\mathscr{D}_\alpha \overline{W}_{\dot{\sigma}} = 0 \tag{13.31}$$

が出る．恒等式 (1)，(2)，(3) は，いかなる新しい結果も与えない．

恒等式 (1)，(2)，(3) は拘束 (13.21) がなくても，ほかの恒等式の結果である．これを示すことはいくつかの退屈な計算が必要なので，ここでは省略する．このような状況は，超対称幾何学では，非常によくあることである．一般に，共変曲率テンソルのある部分は，その他の部分によって表され，ビアンキ恒等式のすべてが一次独立というわけではない．この技術的理由は，基底の形式 E^A の微分が $\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}{}^a$ に比例する部分を常に含んでいるという事実に由来する．われわれは，超重力理論でこの問題（はるかに複雑な作業）に再度出会うであろう．

本章を結論するために，われわれは拘束 (13.21) に従うビアンキ恒等式の解をまとめる．われわれは，2 個の超場 W_α と $\overline{W}^{\dot{\alpha}}$ がビアンキ恒等式を満足することを見つけた．これらの超場は次の拘束方程式に従う．

$$\begin{aligned} \overline{\mathscr{D}}_{\dot{\alpha}} W_\alpha &= 0 \\ \mathscr{D}_\alpha \overline{W}_{\dot{\alpha}} &= 0 \\ \mathscr{D}^\alpha W_\alpha - \overline{\mathscr{D}}_{\dot{\alpha}} \overline{W}^{\dot{\alpha}} &= 0. \end{aligned} \tag{13.32}$$

アーベリアンの場合には，条件 (6.8) と (6.12) であることがわかる．これらの方程式は最も一般的な解として式 (6.11) をもつ．ノンアーベリアンの場合は，式 (13.32) が最も一般的な解として (7.22) をもつとしてよい．

文　献

J. Wess, in “Topics in Quantum Field Theory,” J. A. de Azcárraga, ed., Salamanca (1977); Lecture Notes in Physics 77, Newyork, Springer-Verlag (1978).
R. Grimm, M. Sohnius, and J. Wess, Nucl. Phys. **B13**, 275 (1978).

演　習

(1)　式 (13.11) の行列が式 (13.10) の逆行列であることを示せ．

(2)　e^a，e^α，$e_{\dot{\alpha}}$ を具体的に計算せよ．結果を，式 (11.7) と比較せよ．

(3)　$F_{a\alpha}$ をスピン–3/2 とスピン–1/2 の部分に分解せよ．

$$F_{a\alpha} \to \sigma_{\beta\dot{\beta}}{}^{a} F_{a\alpha} \equiv F_{\beta\alpha\dot{\beta}}$$

$$F_{\beta\alpha\dot{\beta}} = \frac{1}{2}F_{(\beta\alpha)\dot{\beta}} + \frac{1}{2}F_{[\beta\alpha]\dot{\beta}}$$

$$\frac{1}{2}F_{(\beta\alpha)\dot{\beta}} = \frac{1}{2}[F_{\beta\alpha\dot{\beta}} + F_{\alpha\beta\dot{\beta}}] \quad (\text{スピン–3/2})$$

$$\frac{1}{2}F_{[\beta\alpha]\dot{\beta}} = \frac{1}{2}[F_{\beta\alpha\dot{\beta}} - F_{\alpha\beta\dot{\beta}}] \quad (\text{スピン–1/2}).$$

もしも，$F_{a\alpha}$ のスピン–3/2 部分が消えるときは，

$$F_{a\alpha} = -\frac{1}{4}\sigma_{a\alpha\dot{\kappa}}\overline{\sigma}^{b\dot{\kappa}\beta}F_{b\beta}$$

となることを示せ．

(4)　式 (13.23) が式 (13.22) を満たすことを示せ．

(5)　$\mathscr{D}_c F_{\alpha\beta}$ と $\mathscr{D}_\gamma F_{\alpha\beta}$ の具体的な形を導け．

(6)　式 (6.11) の超場 W_α からヤン–ミルズ場 v_{ab} を抜き出せ．結果を，式 (13.25) と比較せよ．

(7)　アーベリアンの場合には，$DW - \overline{D}\,\overline{W} = 0$ が

$$\partial_a v_{bc} + \partial_b v_{ca} + \partial_c v_{ab} = 0$$

を意味することを示せ．

(8)　アーベリアンの場合に再度，恒等式 (1) が，ほかの恒等式と拘束 (13.21) の結果であることを示せ．

$$F_{ac} = -\frac{i}{4}\overline{\sigma}_a{}^{\dot{\beta}\alpha}(\overline{D}_{\dot{\beta}}F_{\alpha c} + D_\alpha F_{\dot{\beta}c})$$

と

$$\begin{aligned}\partial_b F_{ac} &= -\frac{i}{4}\overline{\sigma}_a{}^{\dot{\beta}\alpha}(\overline{D}_{\dot{\beta}}\partial_b F_{\alpha c} + D_\alpha \partial_b F_{\dot{\beta}c}) \\ &= \frac{i}{4}\overline{\sigma}_a{}^{\dot{\beta}\alpha}[\overline{D}_{\dot{\beta}}(D_\alpha F_{bc} + \partial_c F_{\alpha b}) + D_\alpha(\overline{D}_{\dot{\beta}}F_{bc} + \partial_c F_{\dot{\beta}b})]\end{aligned}$$

を用いよ．

(9)　$\phi_\beta = -e^V D_\beta e^{-V}$ が $F_{\alpha\beta} = 0$ の解であることを示せ．

(10)　恒等式 (12.29)，$\mathscr{D}\mathscr{D}\Omega = \Omega F$ の係数関数を，e^A 基底で計算せよ．

14. 多脚場，捩率，曲率

前章では，固い（rigid）超対称変換のもとで不変な理論を考えた．ここでは，これらの変換をゲージ化したい．特に，われわれは x 依存性のある超対称変換のもとで不変な理論を構築したい．第 4 章でのように，このような変換は，超空間での運動を引き起こす：

$$
\begin{aligned}
x^m &\to x^m - i(\theta\sigma^m\overline{\xi}(x) - \xi(x)\sigma^m\overline{\theta}) \\
\theta^\mu &\to \theta^\mu - \xi^\mu(x) \\
\overline{\theta}_{\dot{\mu}} &\to \overline{\theta}_{\dot{\mu}} - \overline{\xi}_{\dot{\mu}}(x).
\end{aligned}
\tag{14.1}
$$

これらの運動は，ある座標変換を生成する：

$$
z^M \to z'^M = z^M - \xi^M(z). \tag{14.2}
$$

したがって，理論を微分形式の言語で理論を表現することが自然である．第 12 章でみたように，この形式論は，座標変換に対し自動的に共変的である．

われわれの基本的な力学変数は，多脚場（vielbein）と接続（connection）である．これらの超場は，多数の成分場を含んでいる．共変的な拘束条件で消去されるものもあれば，式 (14.2) のゲージ変換で消去（gaged away）されるものもある．このようにして，われわれは，最少数の成分場からなる理論に到達する．

多脚形式（vielbein forms）$E^A(z)$ が，局所基準系（local reference frame）：

$$
E^A = dz^M E_M{}^A(z) \tag{14.3}
$$

を定義する．それらは明らかに座標独立（coordinate independent）である．多脚場 $E_M{}^A$ は多脚形式の係数関数である．多脚場は座標で変化する：

$$
\phi^* E_M{}^A(z') = E'_M{}^A(z') = \frac{\partial z^N}{\partial z'^M} E_N{}^A(z). \tag{14.4}
$$

無限小の場合には，これは式 (12.17) に応じて

$$
\begin{aligned}
z'^M &= z^M - \xi^M(z) \\
\delta E_M{}^A &= E'_M{}^A(z) - E_M{}^A(z) \\
&= -\xi^L \partial_L E_M{}^A - (\partial_M \xi^L) E_L{}^A
\end{aligned}
\tag{14.5}
$$

となる．下付の添字 M だけが上の変換に入ることに留意せよ．それがアインシュタイン添字である．アインシュタイン添字が座標変換に参加するのである．それらは，アルファベットの後半の文字で記される．

上付添字 A は，構造群のために残しておく．われわれは，ローレンツ群を構造群としてとる．これは，力学系の解として超対称平坦空間 (13.11) を再現するためである．この選択で，多脚場で定義される基準系は局所的ローレンツ共変である：

$$
\begin{aligned}
\delta E^A &= E^B L_B{}^A(z) \\
\delta E_M{}^A &= E_M{}^B L_B{}^A(z).
\end{aligned}
\tag{14.6}
$$

一般的に，構造群のもとで変換する添字はアルファベットの始まりからとる．それらは，ローレンツ添字とよばれる．ローレンツ生成子 $L_B{}^A$ は三つの既約成分

$$
L_b{}^a, \qquad L_\beta{}^\alpha, \qquad L^{\dot\beta}{}_{\dot\alpha} \tag{14.7}
$$

をもっている．これらの成分は，式 (A.13) からわかるように，σ–行列で関連付けられる．

$$
\sigma_{\alpha\dot\alpha}{}^a \sigma_{\beta\dot\beta}{}^b L_{ab} = -2\varepsilon_{\alpha\beta} L_{\dot\alpha\dot\beta} + 2\varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta} L_{\alpha\beta}. \tag{14.8}
$$

多脚場とその逆，

$$
\begin{aligned}
E_M{}^A E_A{}^N &= \delta_M{}^N \\
E_A{}^M E_M{}^B &= \delta_A{}^B
\end{aligned}
\tag{14.9}
$$

は，二つのタイプの添字を関連付ける：

$$
\begin{aligned}
V_M &= E_M{}^A V_A \\
V_A &= E_A{}^M V_M.
\end{aligned}
\tag{14.10}
$$

可能なかぎり，われわれはローレンツ添字で物理量を書く．それにより，物理量は簡単な変換性をもつ．加えて，それらはローレンツ群のもとで既約な成分に十分に分解される．一例として，多脚形式 $E^a = dz^M E_M{}^a$，$E^\alpha = dz^M E_M{}^\alpha$ と $E_{\dot\alpha} = dz^M E_{M\dot\alpha}$ は座標独立な既約ローレンツ・テンソルである．

共変微分を定式化するために，接続形式

$$\phi = dz^M \phi_M, \qquad \phi_M = \phi_{MA}{}^B \tag{14.11}$$

を導入しなければならない．それはその構造群のもとで

$$\delta\phi = \phi L - L\phi - dL \tag{14.12}$$

のように変換する．接続は，われわれの理論では 2 番目の力学変数である．$\phi_{MA}{}^B$ がその 2 個のローレンツ添字についてリー代数値：

$$\phi_{MAB} = -(-)^{ab}\phi_{MBA} \tag{14.13}$$

であることに留意せよ．その 3 個目の添字 M はアインシュタイン添字である．

多脚場の共変微分は，捩率（torsion）：

$$\begin{aligned} T^A &= dE^A + E^B \phi_B{}^A \\ &= \frac{1}{2} dz^M dz^N T_{NM}{}^A \\ &= \frac{1}{2} E^C E^B T_{BC}{}^A \end{aligned} \tag{14.14}$$

とよばれる．あらわには，

$$\begin{aligned} T_{NM}{}^A = {} & \partial_N E_M{}^A - (-)^{nm}\partial_M E_N{}^A \\ & + (-)^{n(b+m)} E_M{}^B \phi_{NB}{}^A - (-)^{mb} E_N{}^B \phi_{MB}{}^A \end{aligned} \tag{14.15}$$

となる．ローレンツ・テンソル $T_{BC}{}^A$ は，多脚場の逆の助けを借りて $T_{NM}{}^A$ から求めることができて：

$$T_{BC}{}^A = (-)^{b(m+c)} E_C{}^M E_B{}^N T_{NM}{}^A. \tag{14.16}$$

符号因子は，式 (14.14) と E^A の定義から導かれる．それは，M 上の和が添字 B を通じて実行されている事実を簡単に表現している．

平坦空間では，多脚（場）を大域的基準系 (13.11)：

$$E^A = e^A \tag{14.17}$$

に変換できる．それは，固いローレンツ変換を除いて定義される．この系では接続が消えて：

$$\phi = 0. \tag{14.18}$$

しかし，捩率はゼロでなくて：

$$T_{\alpha\dot{\beta}}{}^{c} = T_{\dot{\beta}\alpha}{}^{c} = 2i\sigma_{\alpha\dot{\beta}}{}^{c}. \tag{14.19}$$

すべてのほかの捩率成分は消える．

曲率テンソルは，接続を用いて定義され：

$$R = d\phi + \phi\phi. \tag{14.20}$$

通常通り，それはリー代数値 2–形式：

$$\begin{aligned} R_A{}^B &= \frac{1}{2} dz^M dz^N R_{NMA}{}^B \\ &= \frac{1}{2} E^C E^D R_{DCA}{}^B \\ &= dz^M dz^N \partial_N \phi_{MA}{}^B + dz^M \phi_{MA}{}^C dz^N \phi_{NC}{}^B \end{aligned} \tag{14.21}$$

である．

式 (14.21) から，係数関数 $R_{NMA}{}^B$

$$\begin{aligned} R_{NMA}{}^B = \partial_N \phi_{MA}{}^B &- (-)^{nm} \partial_M \phi_{NA}{}^B \\ &+ (-)^{n(m+a+c)} \phi_{MA}{}^C \phi_{NC}{}^B \\ &- (-)^{m(a+c)} \phi_{NA}{}^C \phi_{MC}{}^B \end{aligned} \tag{14.22}$$

を読みとれる．R は 2–形式なので

$$R_{NMA}{}^B = -(-)^{mn} R_{MNA}{}^B. \tag{14.23}$$

そしてそれはリー代数値であるから

$$\begin{aligned} R_{NMab} &= -R_{NMba} \\ R_{NM\alpha\beta} &= R_{NM\beta\alpha} \\ R_{NM}{}^{\dot\alpha\dot\beta} &= R_{NM}{}^{\dot\beta\dot\alpha} \\ \sigma_{\alpha\dot\alpha}{}^{a}\sigma_{\beta\dot\beta}{}^{b}R_{NMab} &= -2\varepsilon_{\alpha\beta}R_{NM\dot\alpha\dot\beta} + 2\varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta}R_{NM\alpha\beta} \end{aligned} \tag{14.24}$$

であることがわかる．最後の関係は，式 (14.8) による．R のすべてのほかの成分は消える．

捩率と曲率だけが，多脚場と接続とから構成される共変テンソルである．さて，共変量を用いて可能なかぎり成分場の数を減らす拘束を発見しなければならない．不幸にも，適切な拘束を示唆するような一般的処方せんはない．それに代わって，いろいろな選択をしてその結果を調べなければならない．例えば，すべての捩率成分をゼロとおくことはできない．それは，われわれの理論の解として，超対称な平坦空間を排除してしまうからである．同様にして，式 (14.19) だけが，その解として超対称平坦空間を許容するのである．

$$\begin{aligned} T_{\underline{\alpha}\,\underline{\beta}}{}^{\underline{\gamma}} = 0, \qquad T_{\alpha\beta}{}^{c} &= T_{\dot\alpha\dot\beta}{}^{c} = 0 \\ T_{\alpha\dot\beta}{}^{c} = T_{\dot\beta\alpha}{}^{c} &= 2i\sigma_{\alpha\dot\beta}{}^{c} \\ T_{\underline{\alpha}\,b}{}^{c} = T_{a\,\underline{\beta}}{}^{c} &= 0 \\ T_{ab}{}^{c} &= 0 \end{aligned} \tag{14.25}$$

が，固有な拘束であることがわかる．ここで $\underline{\alpha}$ は，α または $\dot\alpha$ である．

次章で，われわれはそれらの拘束に従うビアンキ恒等式を解く．ゲージ理論の場合のように，ビアンキ恒等式は独立な超場の数を相当に制限する．実際に，われわれは式 (14.25) が独立な成分場の数の最小値を与えることをみる．これらは，グラビトン $e_m{}^a(x)$，グラビティーノ $\psi_m{}^\alpha(x)$，$\overline{\psi}_{m\dot\alpha}(x)$，補助場 $M(x)$，$b_a(x) = b_a{}^*(x)$ である．これらの場は，x–空間のいかなる微分方程式による制限も受けない．スピン–2 のグラビトンはエネルギー・運動量テンソルに結合し，一方，スピン–3/2 のグラビティーノはスピン–3/2 のスーパーカレントに結合する，補助場は，質量殻外 (off mass shell) でのフェルミオン自由度とボソン自由度の数を等しくすることにちょうど十分である．

文　献

V. P. Akulov, D. V. Volkov, and V. A. Soroka, JETP Lett. **22**, 187 (1975).
J. Wess and B. Zumino, Phys. Lett. **66B**, 361 (1977).

重要な式

$$\begin{aligned} z'^M &= z^M - \xi^M(z) \\ \delta E_M{}^A &= E'_M{}^A(z) - E_M{}^A(z) \\ &= -\xi^L \partial_L E_M{}^A - (\partial_M \xi^L) E_L{}^A \end{aligned} \tag{14.5}$$

$$\begin{aligned} \delta E^A &= E^B L_B{}^A(z) \\ \delta E_M{}^A &= E_M{}^B L_B{}^A(z) \end{aligned} \tag{14.6}$$

$$\sigma_{\alpha\dot\alpha}{}^a \sigma_{\beta\dot\beta}{}^b L_{ab} = -2\varepsilon_{\alpha\beta} L_{\dot\alpha\dot\beta} + 2\varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta} L_{\alpha\beta} \tag{14.8}$$

$$\delta\phi = \phi L - L\phi - dL \tag{14.12}$$

$$\begin{aligned} T^A &= dE^A + E^B \phi_B{}^A \\ &= \frac{1}{2} dz^M dz^N T_{NM}{}^A \\ &= \frac{1}{2} E^C E^B T_{BC}{}^A \end{aligned} \tag{14.14}$$

$$\begin{aligned} T_{NM}{}^A = \partial_N E_M{}^A - (-)^{nm} \partial_M E_N{}^A \\ + (-)^{n(b+m)} E_M{}^B \phi_{NB}{}^A - (-)^{mb} E_N{}^B \phi_{MB}{}^A \end{aligned} \tag{14.15}$$

$$R = d\phi + \phi\phi \tag{14.20}$$

$$\begin{aligned} R_A{}^B &= \frac{1}{2} dz^M dz^N R_{NMA}{}^B \\ &= \frac{1}{2} E^C E^D R_{DCA}{}^B \\ &= dz^M dz^N \partial_N \phi_{MA}{}^B + dz^M \phi_{MA}{}^C dz^N \phi_{NC}{}^B \end{aligned} \tag{14.21}$$

$$R_{NMA}{}^{B} = \partial_N \phi_{MA}{}^{B} - (-)^{nm}\partial_M \phi_{NA}{}^{B}$$
$$+ (-)^{n(m+a+c)}\phi_{MA}{}^{C}\phi_{NC}{}^{B}$$
$$- (-)^{m(a+c)}\phi_{NA}{}^{C}\phi_{MC}{}^{B} \tag{14.22}$$

$$\begin{aligned} &T_{\underline{\alpha}\,\underline{\beta}}{}^{\underline{\gamma}} = 0, \qquad T_{\alpha\beta}{}^{c} = T_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}{}^{c} = 0 \\ &T_{\alpha\dot{\beta}}{}^{c} = T_{\dot{\beta}\alpha}{}^{c} = 2i\sigma_{\alpha\dot{\beta}}{}^{c} \\ &T_{\underline{\alpha}\, b}{}^{c} = T_{a\,\underline{\beta}}{}^{c} = 0 \\ &T_{ab}{}^{c} = 0 \end{aligned} \tag{14.25}$$

演　　習

(1)　変換 (14.2) のもとで，dx'^M と $\partial/\partial x'^M$ を計算せよ．

$$dx'^M \frac{\partial}{\partial x'^M} = dx^M \frac{\partial}{\partial x^M}$$

を示せ．

(2)　2–形式 Ω に対して，$\delta\Omega_{MN} = \Omega'_{MN}(z) - \Omega_{MN}(z)$ を計算せよ．

(3)　式 (14.8) のもとで，$\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}{}^{m}$ が，4 元ベクトルとして変換することを示せ．

(4)　共変と反変のローレンツ・ベクトル X_A と X^A とについて，あらわに計算せよ．

$$\mathscr{D}_M X^A = \partial_M X^A + (-)^{mb} X^B \phi_{MB}{}^{A}$$
$$\mathscr{D}_M X_A = \partial_M X_A - \phi_{MA}{}^{B} X_B$$
$$\mathscr{D}_B X^A = E_B{}^{M} \mathscr{D}_M X^A$$
$$\mathscr{D}_B X_A = E_B{}^{M} \mathscr{D}_M X_A$$

(5)　ローレンツ・ベクトルの共変微分を用いてアインシュタイン・ベクトルの共変微分

$$\begin{aligned} \nabla_N X_M &= (-)^{n(a+m)} E_M{}^{A} E_N{}^{B} \mathscr{D}_B X_A \\ &= \partial_N X_M + \Gamma_{NM}{}^{R} X_R \\ \Gamma_{NM}{}^{R} &= (-)^{n(a+m)} E_M{}^{A} (\mathscr{D}_N E_A{}^{R}) \end{aligned}$$

を定義せよ．

(6) 演習 (5) の ∇ が捩率のない通常の空間ではふつうの対称接続に帰着することを示せ.

(7) $T_{BC}{}^{A}$ をローレンツ既約なテンソルに分解せよ.

(8) $T_{BC}{}^{A}$ を平坦空間

$$E_N{}^A = e_N{}^A + \kappa e_N{}^B H_B{}^A$$

について，線形化せよ.

(9) $E_m{}^a = \delta_m{}^a + \cdots$ の質量次元をゼロとせよ．このとき，$E_\mu{}^a$，$E_m{}^\alpha$，$E_\mu{}^\alpha$，$T_{ab}{}^c$，$T_{\alpha\beta}{}^c$，$T_{ab}{}^\gamma$，$R_{abc}{}^d$，$R_{ab\gamma}{}^\delta$ に次元を与えよ.

$$[x] = -1, \qquad [\theta] = -\frac{1}{2}$$

$$[E_m{}^a] = 0, \qquad [E_\mu{}^a] = -\frac{1}{2}$$

$$[E_m{}^\alpha] = \frac{1}{2}, \qquad [E_\mu{}^\alpha] = 0$$

$$[T_{ab}{}^c] = 1, \qquad [T_{\alpha\beta}{}^c] = \frac{1}{2}$$

$$[T_{ab}{}^\gamma] = \frac{3}{2}$$

$$[R_{abc}{}^d] = 2, \qquad [R_{ab\gamma}{}^\delta] = 2$$

15. ビアンキ恒等式

われわれは，拘束 (14.25) に従って超重力ビアンキ恒等式を解く用意が整っている．われわれは，超対称ゲージ理論のビアンキ恒等式を解いた第 13 章に類似して進む．われわれは，ビアンキ恒等式が ${E_M}^A(z)$ と ${\phi_{MA}}^B(z)$ に含まれる独立な超場の数を，1 個の複素カイラル超場 R，1 個のエルミート・ベクトル超場 $G_{\alpha\dot{\beta}}$ と完全対称な添字をもつ 1 個のカイラル超場 $W_{\alpha\beta\gamma}$ に帰着させることをみる．捩率と曲率がともにこれら 3 個の超場で表される．

われわれは，本章の終わりに結果をまとめる．これらの公式は今後の章でしばしば使われる．しかし，本書の残りの部分を理解するのに，ここに示される詳細を通しで学ぶ必要はない．

われわれは，捩率と曲率のビアンキ恒等式の記述から始める．それらは直接，式 (12.39) と (14.14) から，

$$\begin{aligned} \mathscr{D}\mathscr{D}E^A &= E^B {R_B}^A \\ \mathscr{D}T^A &= E^B {R_B}^A \end{aligned} \tag{15.1}$$

ここで，${R_B}^A$ は超空間曲率，T^A は捩率である．われわれは，この方程式をローレンツ既約な成分に分解したいので，そのために $\mathscr{D}T^A$ を多脚場の形式で定義される基底で計算する：

$$\begin{aligned} \mathscr{D}T^A &= \frac{1}{2}\mathscr{D}(E^B E^C {T_{CB}}^A) \\ &= \frac{1}{2}E^B E^C \mathscr{D}{T_{CB}}^A + \frac{1}{2}E^B T^C {T_{CB}}^A - \frac{1}{2}T^B E^C {T_{CB}}^A. \end{aligned} \tag{15.2}$$

これを式 (15.1) に代入して

$$E^B E^C E^D (\mathscr{D}_D {T_{CB}}^A - {R_{DCB}}^A + {T_{DC}}^F {T_{FB}}^A) = 0 \tag{15.3}$$

を得る．この恒等式は 30 個のローレンツ共変な成分を含む．しかし，それらは，複素共役の関係にあったり，拘束 (14.25) のために自動的に満たされたりする．結局，13 個の独立な成分：

$$
\begin{aligned}
&(1)\ R_{\beta\delta\gamma\alpha} + R_{\delta\gamma\beta\alpha} + R_{\gamma\beta\delta\alpha} = 0 \\
&(2)\ R_{\delta\dot\gamma\beta\alpha} + R_{\dot\gamma\beta\delta\alpha} = -2i\sigma_{\delta\dot\gamma}{}^{f} T_{\beta f\alpha} - 2i\sigma_{\beta\dot\gamma}{}^{f} T_{\delta f\alpha} \\
&(3)\ R_{\beta\delta\dot\gamma\dot\alpha} = -2i\sigma_{\delta\dot\gamma}{}^{f} T_{\beta f\dot\alpha} - 2i\sigma_{\beta\dot\gamma}{}^{f} T_{\delta f\dot\alpha} \\
&(4)\ R_{\delta b\gamma\alpha} + R_{\gamma b\delta\alpha} = -\mathscr{D}_{\gamma} T_{\delta b\alpha} - \mathscr{D}_{\delta} T_{\gamma b\alpha} \\
&(5)\ R_{b\delta\dot\gamma\dot\alpha} = \mathscr{D}_{\delta} T_{\dot\gamma b\dot\alpha} + \overline{\mathscr{D}}_{\dot\gamma} T_{\delta b\dot\alpha} + 2i\sigma_{\delta\dot\gamma}{}^{f} T_{fb\dot\alpha} \\
&(6)\ \overline{\mathscr{D}}_{\dot\gamma} T_{\dot\delta b\alpha} + \overline{\mathscr{D}}_{\dot\delta} T_{\dot\gamma b\alpha} = 0 \\
&(7)\ R_{\dot\beta\dot\delta ca} = -2i\sigma_{a\phi\dot\delta} T_{\dot\beta c}{}^{\phi} - 2i\sigma_{a\phi\dot\beta} T_{\dot\delta c}{}^{\phi} \qquad\qquad (15.4) \\
&(8)\ R_{\beta\dot\delta ca} = -2i\sigma_{a\phi\dot\delta} T_{\beta c}{}^{\phi} + 2i\sigma_{a\beta\dot\phi} T_{\dot\delta c}{}^{\dot\phi} \\
&(9)\ R_{bd\dot\gamma\dot\alpha} = \mathscr{D}_{b} T_{d\dot\gamma\dot\alpha} + \mathscr{D}_{d} T_{\dot\gamma b\alpha} + \overline{\mathscr{D}}_{\dot\gamma} T_{bd\dot\alpha} + T_{d\dot\gamma}{}^{\underline{\phi}} T_{\underline{\phi}\, b\dot\alpha} + T_{\dot\gamma b}{}^{\underline{\phi}} T_{\underline{\phi}\, d\dot\alpha} \\
&(10)\ \mathscr{D}_{b} T_{d\gamma\alpha} + \mathscr{D}_{d} T_{\dot\gamma b\alpha} + \overline{\mathscr{D}}_{\dot\gamma} T_{bd\alpha} + T_{d\dot\gamma}{}^{\underline{\phi}} T_{\underline{\phi}\, b\alpha} + T_{\dot\gamma b}{}^{\underline{\phi}} T_{\underline{\phi}\, d\alpha} = 0 \\
&(11)\ R_{\beta dca} + R_{c\beta da} + 2i\sigma_{\alpha\beta\dot\phi} T_{dc}{}^{\phi} = 0 \\
&(12)\ \mathscr{D}_{b} T_{dc\alpha} + \mathscr{D}_{d} T_{cb\alpha} + \mathscr{D}_{c} T_{bd\alpha} + T_{bd}{}^{\underline{\phi}} T_{\underline{\phi}\, c\alpha} + T_{dc}{}^{\underline{\phi}} T_{\underline{\phi}\, b\alpha} + T_{cb}{}^{\underline{\phi}} T_{\underline{\phi}\, d\alpha} = 0 \\
&(13)\ R_{bdca} + R_{dcba} + R_{cbda} = 0
\end{aligned}
$$

になる．下線の付いた添字 $\underline{\phi}$ は ϕ と $\dot\phi$ にわたる和である．

われわれは，まず線形で微分を含まない恒等式を解く．これらは，(1)，(2)，(3)，(7)，(8)，(11)，(13) の諸式ある．恒等式 (7)，

$$R_{\dot\beta\dot\delta ca} = -2i\sigma_{a\phi\dot\delta} T_{\dot\beta c}{}^{\phi} - 2i\sigma_{a\phi\dot\beta} T_{\dot\delta c}{}^{\phi} \tag{15.5}$$

をスピノル表示

$$
\begin{aligned}
R_{\dot\beta\dot\delta\gamma\dot\gamma\alpha\dot\alpha} &= \sigma_{\gamma\dot\gamma}{}^{c} \sigma_{\alpha\dot\alpha}{}^{a} R_{\dot\beta\dot\delta ca} \\
T_{\dot\delta\gamma\dot\gamma\phi} &= \sigma_{\gamma\dot\gamma}{}^{c} T_{\dot\delta c\phi}
\end{aligned}
\tag{15.6}
$$

に移すことから出発する．R はリー代数値なので，

$$R_{\dot\beta\dot\delta\gamma\dot\gamma\alpha\dot\alpha} = -2\varepsilon_{\gamma\alpha} R_{\dot\beta\dot\delta\dot\gamma\dot\alpha} + 2\varepsilon_{\dot\gamma\dot\alpha} R_{\dot\beta\dot\delta\gamma\alpha}. \tag{15.7}$$

ここで，$R_{\dot\beta\dot\delta\gamma\alpha}$ と $R_{\dot\beta\dot\delta\dot\gamma\dot\alpha}$ はそれぞれ $\gamma\alpha$ と $\dot\gamma\dot\alpha$ に関して対称である．R は 2–形式なので，$R_{\dot\beta\dot\delta\gamma\alpha}$ と $R_{\dot\beta\dot\delta\dot\gamma\dot\alpha}$ も $\dot\beta\dot\delta$ に関して対称である．R と T のこれらの表現を用いる

と，式 (15.5) は

$$\varepsilon_{\dot{\gamma}\dot{\alpha}}R_{\dot{\beta}\dot{\delta}\gamma\alpha}-\varepsilon_{\gamma\alpha}R_{\dot{\beta}\dot{\delta}\dot{\gamma}\dot{\alpha}}=2i(\varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}T_{\dot{\delta}\gamma\dot{\gamma}\alpha}+\varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\delta}}T_{\dot{\beta}\gamma\dot{\gamma}\alpha}) \tag{15.8}$$

となる．

テンソル $T_{\dot{\delta}\gamma\dot{\gamma}\alpha}$ は，決まった対称性をもつ成分に分解される：

$$T_{\dot{\delta}\gamma\dot{\gamma}\alpha}=\varepsilon_{\dot{\delta}\dot{\gamma}}\varepsilon_{\gamma\alpha}T+\varepsilon_{\dot{\delta}\dot{\gamma}}T_{\underline{\gamma\alpha}}+\varepsilon_{\gamma\alpha}T_{\underline{\dot{\delta}\dot{\gamma}}}+T_{\underline{\gamma\alpha}\,\underline{\dot{\delta}\dot{\gamma}}}. \tag{15.9}$$

式 (15.9) とそれ以降では，テンソルは下線が付けられた添字に関して対称とする．式 (15.8) は，いくつかの対称性の組に分離する．まず，$\gamma\alpha$ と $\dot{\gamma}\dot{\alpha}$ の両方がそれぞれ反対称の部分を考える．これは，$\varepsilon^{\alpha\gamma}$ と $\varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\gamma}}$ で写し出され：

$$T_{\dot{\delta}}{}^{\alpha}{}_{\dot{\beta}\alpha}+T_{\dot{\beta}}{}^{\alpha}{}_{\dot{\delta}\alpha}=0. \tag{15.10}$$

この式には曲率 R が抜け落ちていることに留意せよ．式 (15.9) を式 (15.10) に代入して，

$$T_{\underline{\dot{\beta}\dot{\delta}}}=0 \tag{15.11}$$

を発見する．

われわれは，次に (15.8) の中で，$\gamma\alpha$ に関して対称な部分：

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\dot{\gamma}\dot{\alpha}}R_{\dot{\beta}\dot{\delta}\gamma\alpha}&=2i(\varepsilon_{\alpha\dot{\beta}}\varepsilon_{\dot{\delta}\dot{\gamma}}+\varepsilon_{\dot{\alpha}\delta}\varepsilon_{\dot{\beta}\dot{\gamma}})T_{\underline{\gamma\alpha}}\\&\quad+2i(\varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}T_{\underline{\gamma\alpha}\,\underline{\dot{\delta}\dot{\gamma}}}+\varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\delta}}T_{\underline{\gamma\alpha}\,\underline{\dot{\beta}\dot{\gamma}}})\end{aligned} \tag{15.12}$$

を考える．これに $\varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$ を掛けると

$$R_{\dot{\gamma}\dot{\delta}\gamma\alpha}=6i\varepsilon_{\dot{\gamma}\dot{\delta}}T_{\underline{\gamma\alpha}}-6iT_{\underline{\gamma\alpha}\,\underline{\dot{\delta}\dot{\gamma}}} \tag{15.13}$$

を得る．しかし，$R_{\dot{\gamma}\dot{\delta}\gamma\alpha}$ は $\dot{\gamma}\dot{\delta}$ に関して対称なので

$$T_{\underline{\gamma\alpha}}=0 \tag{15.14}$$

となり

$$R_{\dot{\gamma}\dot{\delta}\gamma\alpha}=-6iT_{\underline{\gamma\alpha}\,\underline{\dot{\delta}\dot{\gamma}}}. \tag{15.15}$$

もし，式 (15.12) に $\varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\gamma}}$ を掛けると

$$R_{\dot{\beta}\dot{\delta}\gamma\alpha} = -2iT_{\underline{\gamma\alpha}\,\underline{\dot{\beta}\dot{\delta}}} \tag{15.16}$$

となる．式 (15.15) と式 (15.16) が両立するのは

$$\begin{aligned} T_{\underline{\gamma\alpha}\,\underline{\dot{\beta}\dot{\delta}}} &= 0 \\ R_{\dot{\beta}\dot{\delta}\gamma\alpha} &= 0 \end{aligned} \tag{15.17}$$

の場合だけに限られる．

分解 (15.9) の中で，一つの項だけ残っている（われわれはそれを R とよぶ）と，$T = -2iR$：

$$T_{\dot{\delta}\gamma\dot{\gamma}\alpha} = -2i\varepsilon_{\dot{\delta}\dot{\gamma}}\varepsilon_{\gamma\alpha}R. \tag{15.18}$$

式 (15.8) から，ただちに

$$R_{\dot{\beta}\dot{\delta}\dot{\gamma}\dot{\alpha}} = 4(\varepsilon_{\dot{\beta}\dot{\alpha}}\varepsilon_{\dot{\delta}\dot{\gamma}} + \varepsilon_{\dot{\delta}\dot{\alpha}}\varepsilon_{\dot{\beta}\dot{\gamma}})R \tag{15.19}$$

がわかる．

これらの結果から，われわれは，恒等式 (7) の最も一般的な解を発見した．われわれは，また，$R_{\dot{\beta}\dot{\delta}ca}$ と $T_{\dot{\delta}c\phi}$ が単一の超場 R で表されることを学んだ．同様に $R_{\beta\delta ca}$ と $T_{\delta c\dot{\phi}}$ を R^+ で書くことができる．上記の表現は恒等式 (1) と (3) も同様に満たす．

今度は，恒等式 (2) と (8) を考える．計算はまったく同様なので，結果だけを列記する：

$$\begin{aligned} R_{\beta\dot{\delta}\gamma\alpha} &= \varepsilon_{\gamma\beta}G_{\alpha\dot{\delta}} + \varepsilon_{\alpha\beta}G_{\gamma\dot{\delta}} \\ T_{\beta\gamma\dot{\gamma}\phi} &= \frac{i}{4}(\varepsilon_{\gamma\phi}G_{\beta\gamma} - 3\varepsilon_{\beta\gamma}G_{\phi\dot{\gamma}} - 3\varepsilon_{\beta\phi}G_{\gamma\dot{\gamma}}) \\ {G^+}_{\alpha\dot{\alpha}} &= G_{\alpha\dot{\alpha}}. \end{aligned} \tag{15.20}$$

計算の詳細は，演習 (1) として読者に残す．

恒等式 (11) は，$R_{\beta dca}$ を捩率で与える．$R_{\beta dca}$ は，c と a に関して反対称なので，

$$R_{\beta dca} = i(\sigma_{d\beta\dot{\phi}}{T_{ca}}^{\dot{\phi}} - \sigma_{a\beta\dot{\phi}}{T_{dc}}^{\dot{\phi}} - \sigma_{c\beta\dot{\phi}}{T_{ad}}^{\dot{\phi}}) \tag{15.21}$$

となる．

われわれは，(13) を除く微分を含まないすべての線形恒等式を解いた．恒等式 (13) は，しかし，4 次元時空の曲率のふつうの巡回的恒等式にすぎない．それは通常の重力理論から既知でその結果はよく知られている．スピノル表記では，

$$R_{\gamma\dot{\gamma}\delta\dot{\delta}\beta\dot{\beta}\alpha\dot{\alpha}} = \sigma_{\gamma\dot{\gamma}}{}^{c}\sigma_{\delta\dot{\delta}}{}^{d}\sigma_{\beta\dot{\beta}}{}^{b}\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}{}^{a}R_{cdba} \tag{15.22}$$

の対称性が次のような分解，

$$\begin{aligned} R_{\gamma\dot{\gamma}\delta\dot{\delta}\beta\dot{\beta}\alpha\dot{\alpha}} = {} & 4\varepsilon_{\gamma\delta}\varepsilon_{\beta\alpha}\overline{X}_{\underline{\dot{\gamma}\dot{\delta}}\,\underline{\dot{\beta}\dot{\alpha}}} \\ & - 4\varepsilon_{\gamma\delta}\varepsilon_{\dot{\beta}\dot{\alpha}}\overline{\Psi}_{\underline{\dot{\gamma}\dot{\delta}}\,\underline{\beta\alpha}} - 4\varepsilon_{\dot{\gamma}\dot{\delta}}\varepsilon_{\beta\alpha}\Psi_{\underline{\gamma\delta}\,\underline{\dot{\beta}\dot{\alpha}}} \\ & + 4\varepsilon_{\dot{\gamma}\dot{\delta}}\varepsilon_{\dot{\beta}\dot{\alpha}}X_{\underline{\gamma\delta}\,\underline{\beta\alpha}} \end{aligned} \tag{15.23}$$

に導く．恒等式 (13) が満足されるのは

$$\begin{aligned} \Psi_{\underline{\gamma\delta}\,\underline{\dot{\beta}\dot{\alpha}}} &= \overline{\Psi}_{\underline{\dot{\beta}\dot{\alpha}}\,\underline{\gamma\delta}} \\ X_{\alpha\beta\gamma}{}^{\beta} &= \varepsilon_{\alpha\gamma}\Lambda \end{aligned} \tag{15.24}$$

の場合だけに限られ，Λ は「実」である．

われわれは，微分を線形に含む恒等式を解くことに進む．それらは，恒等式 (4), (5) と (6) である．式 (15.18) を恒等式 (6) に代入することから始める．これは，

$$\varepsilon_{\dot{\delta}\dot{\beta}}\varepsilon_{\beta\alpha}\overline{\mathscr{D}}_{\dot{\gamma}}R + \varepsilon_{\dot{\gamma}\dot{\beta}}\varepsilon_{\beta\alpha}\overline{\mathscr{D}}_{\dot{\delta}}R = 0 \tag{15.25}$$

となる．$\varepsilon^{\dot{\delta}\dot{\beta}}$ で縮約して

$$\overline{\mathscr{D}}_{\dot{\gamma}}R = 0 \tag{15.26}$$

となるので，超場 R と R^{+}

$$\mathscr{D}_{\gamma}R^{+} = 0 \tag{15.27}$$

は，カイラルである．

恒等式 (4) の評価は退屈である．われわれは，$R_{\delta cab}$ がリー代数値：

$$\begin{aligned} R_{\delta\gamma\dot{\gamma}\alpha\dot{\alpha}\beta\dot{\beta}} &= \sigma_{\gamma\dot{\gamma}}{}^{c}\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}{}^{a}\sigma_{\beta\dot{\beta}}{}^{b}R_{\delta cab} \\ &= -2\varepsilon_{\alpha\beta}R_{\delta\gamma\dot{\gamma}\dot{\alpha}\dot{\beta}} + 2\varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}R_{\delta\gamma\dot{\gamma}\alpha\beta} \end{aligned} \tag{15.28}$$

であることを使わなければならない．成分 $R_{\delta cab}$ が式 (15.21) を通じて捩率に関係付けられ，$T_{dc\dot{\phi}}$ は次のように分解される：

$$T_{\delta\dot{\delta}\gamma\dot{\gamma}\dot{\phi}} = -2\varepsilon_{\delta\gamma}(\overline{W}_{\underline{\dot{\delta}\dot{\gamma}\dot{\phi}}} + \varepsilon_{\dot{\phi}\dot{\gamma}}\overline{W}_{\dot{\delta}} + \varepsilon_{\dot{\phi}\dot{\delta}}\overline{W}_{\dot{\gamma}}) + 2\varepsilon_{\dot{\delta}\dot{\gamma}}W_{\underline{\delta\gamma}\,\dot{\phi}}. \quad (15.29)$$

式 (15.21)，(15.28)，(15.29) と恒等式 (4) を束にして，

$$\begin{aligned} T_{\delta\dot{\delta}\gamma\dot{\gamma}\dot{\alpha}} = &-2\varepsilon_{\delta\gamma}\overline{W}_{\underline{\dot{\delta}\dot{\gamma}\dot{\alpha}}} - \frac{1}{2}\varepsilon_{\delta\gamma}(\varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\gamma}}\mathscr{D}^{\beta}G_{\beta\dot{\delta}} + \varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\delta}}\mathscr{D}^{\beta}G_{\beta\dot{\gamma}}) \\ &+\frac{1}{2}\varepsilon_{\dot{\delta}\dot{\gamma}}(\mathscr{D}_{\delta}G_{\gamma\dot{\alpha}} + \mathscr{D}_{\gamma}G_{\delta\dot{\alpha}}) \end{aligned} \quad (15.30)$$

と

$$\begin{aligned} R_{\beta\delta\dot{\delta}\gamma\alpha} = &\frac{1}{2}i(\varepsilon_{\beta\delta}\mathscr{D}_{\gamma} + \varepsilon_{\beta\gamma}\mathscr{D}_{\delta})G_{\alpha\dot{\delta}} + \frac{1}{2}i(\varepsilon_{\beta\delta}\mathscr{D}_{\alpha} + \varepsilon_{\beta\alpha}\mathscr{D}_{\delta})G_{\gamma\dot{\delta}} \\ &+ i(\varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon_{\delta\gamma} + \varepsilon_{\gamma\beta}\varepsilon_{\delta\alpha})\mathscr{D}^{\epsilon}G_{\epsilon\dot{\delta}} \end{aligned} \quad (15.31)$$

$$R_{\beta\delta\dot{\delta}\dot{\gamma}\dot{\alpha}} = 4i\varepsilon_{\beta\delta}\overline{W}_{\underline{\dot{\gamma}\dot{\alpha}\dot{\delta}}} + \frac{1}{2}i(\varepsilon_{\dot{\delta}\dot{\gamma}}\mathscr{D}_{\beta}G_{\delta\dot{\alpha}} + \varepsilon_{\dot{\delta}\dot{\alpha}}\mathscr{D}_{\beta}G_{\delta\dot{\gamma}})$$

を得る．対称テンソル $W_{\underline{\alpha\beta\gamma}}$ は，恒等式から抜け落ちるので，それは未定のままである．テンソル $\overline{W}_{\dot{\delta}}$ と $W_{\underline{\delta\gamma}\,\dot{\phi}}$ は G に関係付けられる．

恒等式 (5) は，同じ曲率と捩率成分の間にもう 1 個の関係を与える．それは，式 (15.30)，(15.31) の結果として

$$\mathscr{D}^{\beta}G_{\beta\dot{\alpha}} = \overline{\mathscr{D}}_{\alpha}R^{+} \quad (15.32)$$

である．

われわれは，すべての線形恒等式を解いた．非線形恒等式は，G と R の非線形表現として捩率と曲率の成分を定義するか，または，共変微分の交換関係を通じて線形方程式に帰着するかである．例えば，恒等式 (9) は $R_{cd\dot{\gamma}\dot{\alpha}}$，したがって，$\overline{\mathrm{X}}_{\underline{\dot{\gamma}\dot{\delta}}\,\underline{\dot{\epsilon}\dot{\alpha}}}$ と $\Psi_{\underline{\gamma\delta}\,\underline{\dot{\epsilon}\dot{\alpha}}}$ を捩率成分で表現する．これらは，順番に，W，G そして R で表される：

$$\begin{aligned} \overline{\mathrm{X}}_{\underline{\dot{\beta}\dot{\delta}}\,\underline{\dot{\gamma}\dot{\alpha}}} = \frac{1}{4}\Big[&-\mathscr{D}_{\beta\dot{\beta}}T_{\dot{\gamma}}{}^{\beta}{}_{\dot{\delta}\dot{\alpha}} - \mathscr{D}_{\beta\dot{\delta}}T_{\dot{\gamma}}{}^{\beta}{}_{\dot{\beta}\dot{\alpha}} + \overline{\mathscr{D}}_{\dot{\gamma}}T_{\beta\dot{\beta}}{}^{\beta}{}_{\dot{\delta}\dot{\alpha}} \\ &- T_{\dot{\gamma}}{}^{\beta}{}_{\dot{\delta}}{}^{\underline{\phi}}T_{\underline{\phi}\,\beta\dot{\beta}\dot{\alpha}} + T_{\dot{\gamma}\beta\dot{\beta}}{}^{\underline{\phi}}T_{\underline{\phi}}{}^{\beta}{}_{\dot{\delta}\dot{\alpha}}\Big]. \end{aligned} \quad (15.33)$$

$\overline{\mathrm{X}}_{\underline{\dot{\beta}\dot{\delta}}\,\underline{\dot{\gamma}\dot{\alpha}}}$ の対称性と関係式

$$\begin{aligned} \overline{\mathscr{D}}_{\dot{\delta}}\mathscr{D}^{\alpha}G_{\dot{\beta}\alpha} + \overline{\mathscr{D}}_{\dot{\beta}}\mathscr{D}^{\alpha}G_{\dot{\delta}\alpha} &= (\overline{\mathscr{D}}_{\dot{\delta}}\overline{\mathscr{D}}_{\dot{\beta}} + \overline{\mathscr{D}}_{\dot{\beta}}\overline{\mathscr{D}}_{\dot{\delta}})R^{+} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (15.34)$$

のために，式 (15.33) から

$$\overline{\mathscr{D}}^{\dot{\alpha}}\overline{W}_{\underline{\dot{\alpha}\dot{\beta}\dot{\delta}}} + \frac{1}{2}i(\mathscr{D}_{\beta\dot{\beta}}G^{\beta}{}_{\dot{\delta}} + \mathscr{D}_{\beta\dot{\delta}}G^{\beta}{}_{\dot{\beta}}) = 0 \tag{15.35}$$

を得る．

最後に，われわれは恒等式 (10) を調べる．捩率項は，W，G，R で表される．1個を除くすべては ε–テンソルを含んでいるので，すべての添字について対称化すると

$$\mathscr{D}_{\alpha}\overline{W}_{\underline{\dot{\beta}\dot{\gamma}\dot{\delta}}} = 0 \tag{15.36}$$

になる．対称テンソル $\overline{W}_{\underline{\dot{\beta}\dot{\gamma}\dot{\delta}}}$ は，カイラル超場である．

われわれは，拘束 (14.25) に従ってビアンキ恒等式 (15.4) を解いた．われわれは，捩率と曲率のすべての成分が超場，R，$G_{\alpha\dot{\alpha}}$，$W_{\alpha\beta\gamma}$ で表されることを学んだ．これらの超場は次の条件に従う：

$$\begin{aligned}
&(1)\ \overline{\mathscr{D}}_{\dot{\alpha}}R = 0\\
&(2)\ \mathscr{D}^{\alpha}G_{\alpha\dot{\beta}} = \overline{\mathscr{D}}_{\dot{\beta}}R^{+}, \qquad \overline{\mathscr{D}}^{\beta}G_{\alpha\dot{\beta}} = \mathscr{D}_{\alpha}R\\
&(3)\ \overline{\mathscr{D}}_{\dot{\alpha}}W_{\beta\gamma\delta} = 0, \qquad \mathscr{D}_{\alpha}\overline{W}_{\dot{\beta}\dot{\gamma}\dot{\delta}} = 0\\
&(4)\ \overline{\mathscr{D}}^{\dot{\alpha}}\overline{W}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}\dot{\delta}} + \frac{1}{2}i(\mathscr{D}_{\beta\dot{\beta}}G^{\beta}{}_{\dot{\delta}} + \mathscr{D}_{\beta\dot{\delta}}G^{\beta}{}_{\dot{\beta}}) = 0\\
&\qquad \mathscr{D}^{\alpha}W_{\alpha\beta\delta} + \frac{1}{2}i(\mathscr{D}_{\beta\dot{\beta}}G_{\delta}{}^{\dot{\beta}} + \mathscr{D}_{\delta\dot{\beta}}G_{\beta}{}^{\dot{\beta}}) = 0\\
&(5)\ (G_{\alpha\dot{\alpha}})^{+} = G_{\alpha\dot{\alpha}}\\
&(6)\ (W_{\alpha\beta\gamma})^{+} = \overline{W}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}\dot{\gamma}}.
\end{aligned} \tag{15.37}$$

超場 $W_{\alpha\beta\gamma}$ は，添字に関して完全対称である．

今後の参考として，われわれの結果を以下に集めておく．

捩率：

$$\begin{aligned}
&(1)\ T_{\gamma\dot{\varepsilon}}{}^{c} = T_{\dot{\varepsilon}\gamma}{}^{c} = 2i\sigma_{\gamma\dot{\varepsilon}}{}^{c}\\
&(2)\ T_{\dot{\delta}e}{}^{\alpha} = -T_{e\dot{\delta}}{}^{\alpha} = -\frac{1}{2}\overline{\sigma}_{e}{}^{\dot{\varepsilon}\varepsilon}T_{\dot{\delta}\varepsilon\dot{\varepsilon}}{}^{\alpha}\\
&\qquad T_{\dot{\delta}\varepsilon\dot{\varepsilon}\alpha} = -2i\varepsilon_{\dot{\delta}\dot{\varepsilon}}\varepsilon_{\varepsilon\alpha}R\\
&(3)\ T_{\delta e}{}^{\dot{\alpha}} = -T_{e\delta}{}^{\dot{\alpha}} = -\frac{1}{2}\overline{\sigma}_{e}{}^{\dot{\varepsilon}\varepsilon}T_{\delta\varepsilon\dot{\varepsilon}}{}^{\dot{\alpha}}\\
&\qquad T_{\delta\varepsilon\dot{\varepsilon}\dot{\alpha}} = -2i\varepsilon_{\delta\varepsilon}\varepsilon_{\dot{\varepsilon}\dot{\alpha}}R^{+}
\end{aligned}$$

$$(4)\ T_{\delta e}{}^{\alpha} = -T_{e\delta}{}^{\alpha} = -\frac{1}{2}\overline{\sigma}_e{}^{\dot{\varepsilon}\varepsilon}T_{\delta\varepsilon\dot{\varepsilon}}{}^{\alpha}$$

$$T_{\delta\varepsilon\dot{\varepsilon}\alpha} = \frac{i}{4}(\varepsilon_{\varepsilon\alpha}G_{\delta\dot{\varepsilon}} - 3\varepsilon_{\delta\alpha}G_{\varepsilon\dot{\varepsilon}} - 3\varepsilon_{\delta\varepsilon}G_{\alpha\dot{\varepsilon}})$$

$$(5)\ T_{\dot{\delta}e}{}^{\dot{\alpha}} = -T_{e\dot{\delta}}{}^{\dot{\alpha}} = -\frac{1}{2}\overline{\sigma}_e{}^{\dot{\varepsilon}\varepsilon}T_{\dot{\delta}\varepsilon\dot{\varepsilon}}{}^{\dot{\alpha}}$$

$$T_{\dot{\delta}\varepsilon\dot{\varepsilon}\dot{\alpha}} = \frac{i}{4}(\varepsilon_{\dot{\varepsilon}\dot{\alpha}}G_{\varepsilon\dot{\delta}} - 3\varepsilon_{\dot{\delta}\dot{\alpha}}G_{\varepsilon\dot{\varepsilon}} - 3\varepsilon_{\dot{\delta}\dot{\varepsilon}}G_{\varepsilon\dot{\alpha}})$$

$$(6)\ T_{dc}{}^{\alpha} = -T_{cd}{}^{\alpha} = \frac{1}{4}\overline{\sigma}_d{}^{\dot{\delta}\delta}\overline{\sigma}_c{}^{\dot{\gamma}\gamma}T_{\delta\dot{\delta}\gamma\dot{\gamma}}{}^{\alpha}$$

$$T_{\delta\dot{\delta}\gamma\dot{\gamma}\alpha} = -2\varepsilon_{\dot{\delta}\dot{\gamma}}W_{\delta\gamma\alpha} - \frac{1}{2}\varepsilon_{\dot{\delta}\dot{\gamma}}(\varepsilon_{\delta\alpha}\overline{\mathscr{D}}_{\dot{\phi}}G_{\gamma}{}^{\dot{\phi}} + \varepsilon_{\gamma\alpha}\overline{\mathscr{D}}_{\dot{\phi}}G_{\delta}{}^{\phi})$$
$$+ \frac{1}{2}\varepsilon_{\delta\gamma}(\overline{\mathscr{D}}_{\dot{\delta}}G_{\alpha\dot{\gamma}} + \overline{\mathscr{D}}_{\dot{\gamma}}G_{\alpha\dot{\delta}})$$

$$(7)\ T_{dc}{}^{\dot{\alpha}} = -T_{cd}{}^{\dot{\alpha}} = \frac{1}{4}\overline{\sigma}_d{}^{\dot{\delta}\delta}\overline{\sigma}_c{}^{\dot{\gamma}\gamma}T_{\delta\dot{\delta}\gamma\gamma}{}^{\dot{\alpha}}$$

$$T_{\delta\dot{\delta}\gamma\dot{\gamma}\dot{\alpha}} = -2\varepsilon_{\delta\gamma}\overline{W}_{\dot{\delta}\dot{\gamma}\dot{\alpha}} - \frac{1}{2}\varepsilon_{\delta\gamma}(\varepsilon_{\dot{\delta}\dot{\alpha}}\mathscr{D}_{\phi}G^{\phi}{}_{\dot{\gamma}} + \varepsilon_{\dot{\gamma}\dot{\alpha}}\mathscr{D}_{\phi}G^{\phi}{}_{\dot{\delta}})$$
$$+ \frac{1}{2}\varepsilon_{\dot{\delta}\dot{\gamma}}(\mathscr{D}_{\delta}G_{\gamma\dot{\alpha}} + \mathscr{D}_{\gamma}G_{\delta\dot{\alpha}}) \qquad (15.38)$$

曲率：

$$(1)\ R_{\delta\gamma\varepsilon\alpha} = 4(\varepsilon_{\delta\varepsilon}\varepsilon_{\gamma\alpha} + \varepsilon_{\gamma\varepsilon}\varepsilon_{\delta\alpha})R^{+}$$

$$R_{\dot{\delta}\dot{\gamma}\dot{\varepsilon}\dot{\alpha}} = 4(\varepsilon_{\dot{\delta}\dot{\varepsilon}}\varepsilon_{\dot{\gamma}\dot{\alpha}} + \varepsilon_{\dot{\gamma}\dot{\varepsilon}}\varepsilon_{\dot{\delta}\dot{\alpha}})R$$

$$(2)\ R_{\delta\gamma\dot{\varepsilon}\dot{\alpha}} = R_{\dot{\delta}\dot{\gamma}\varepsilon\alpha} = 0$$

$$(3)\ R_{\delta\dot{\gamma}\varepsilon\alpha} = R_{\dot{\gamma}\delta\varepsilon\alpha} = -(\varepsilon_{\delta\varepsilon}G_{\alpha\dot{\gamma}} + \varepsilon_{\delta\alpha}G_{\varepsilon\dot{\gamma}})$$

$$R_{\delta\dot{\gamma}\dot{\varepsilon}\dot{\alpha}} = R_{\dot{\gamma}\delta\dot{\varepsilon}\dot{\alpha}} = -(\varepsilon_{\dot{\gamma}\dot{\varepsilon}}G_{\delta\dot{\alpha}} + \varepsilon_{\dot{\gamma}\dot{\alpha}}G_{\delta\dot{\varepsilon}})$$

$$(4)\ R_{\varepsilon c\delta\alpha} = -R_{c\varepsilon\delta\alpha} = -\frac{1}{2}\overline{\sigma}_c{}^{\dot{\gamma}\gamma}R_{\varepsilon\gamma\dot{\gamma}\delta\alpha}$$

$$R_{\varepsilon\gamma\dot{\gamma}\delta\alpha} = i(\varepsilon_{\varepsilon\delta}\varepsilon_{\gamma\alpha} + \varepsilon_{\varepsilon\alpha}\varepsilon_{\gamma\delta})\mathscr{D}_{\phi}G^{\phi}{}_{\dot{\gamma}} + \frac{i}{2}(\varepsilon_{\varepsilon\gamma}\mathscr{D}_{\delta} + \varepsilon_{\varepsilon\delta}\mathscr{D}_{\gamma})G_{\alpha\dot{\gamma}}$$
$$+ \frac{i}{2}(\varepsilon_{\varepsilon\gamma}\mathscr{D}_{\alpha} + \varepsilon_{\varepsilon\alpha}\mathscr{D}_{\gamma})G_{\delta\dot{\gamma}}$$

$$(5)\ R_{\varepsilon c\dot{\delta}\dot{\alpha}} = -R_{c\varepsilon\dot{\delta}\dot{\alpha}} = -\frac{1}{2}\overline{\sigma}_c{}^{\dot{\gamma}\gamma}R_{\varepsilon\gamma\dot{\gamma}\dot{\delta}\dot{\alpha}}$$

$$R_{\varepsilon\gamma\dot{\gamma}\dot{\delta}\dot{\alpha}} = 4i\varepsilon_{\varepsilon\gamma}\overline{W}_{\dot{\gamma}\dot{\delta}\dot{\alpha}} + \frac{i}{2}(\varepsilon_{\dot{\gamma}\dot{\delta}}\mathscr{D}_{\varepsilon}G_{\gamma\dot{\alpha}} + \varepsilon_{\dot{\gamma}\dot{\alpha}}\mathscr{D}_{\varepsilon}G_{\gamma\dot{\delta}})$$

$$(6)\ R_{\dot{\varepsilon}c\delta\alpha} = -R_{c\dot{\varepsilon}\delta\alpha} = -\frac{1}{2}\overline{\sigma}_c{}^{\dot{\gamma}\gamma} R_{\dot{\varepsilon}\gamma\dot{\gamma}\delta\alpha}$$

$$R_{\dot{\varepsilon}\gamma\dot{\gamma}\delta\alpha} = 4i\varepsilon_{\dot{\varepsilon}\dot{\gamma}} W_{\delta\gamma\alpha} + \frac{i}{2}(\varepsilon_{\gamma\delta}\overline{\mathscr{D}}_{\dot{\varepsilon}} G_{\alpha\dot{\gamma}} + \varepsilon_{\gamma\alpha}\overline{\mathscr{D}}_{\dot{\varepsilon}} G_{\delta\dot{\gamma}})$$

$$(7)\ R_{\dot{\varepsilon}c\dot{\delta}\dot{\alpha}} = -R_{c\dot{\varepsilon}\dot{\delta}\dot{\alpha}} = -\frac{1}{2}\overline{\sigma}_c{}^{\dot{\gamma}\gamma} R_{\dot{\varepsilon}\gamma\dot{\gamma}\dot{\delta}\dot{\alpha}}$$

$$R_{\dot{\varepsilon}\gamma\dot{\gamma}\dot{\delta}\dot{\alpha}} = i(\varepsilon_{\dot{\varepsilon}\dot{\delta}}\varepsilon_{\dot{\gamma}\dot{\alpha}} + \varepsilon_{\dot{\varepsilon}\dot{\alpha}}\varepsilon_{\dot{\gamma}\dot{\delta}})\overline{\mathscr{D}}_{\dot{\phi}} G_{\gamma}{}^{\dot{\phi}} + \frac{i}{2}(\varepsilon_{\dot{\varepsilon}\dot{\gamma}}\overline{\mathscr{D}}_{\dot{\delta}} + \varepsilon_{\dot{\varepsilon}\dot{\delta}}\overline{\mathscr{D}}_{\dot{\gamma}})G_{\gamma\dot{\alpha}} + \frac{i}{2}(\varepsilon_{\dot{\varepsilon}\dot{\gamma}}\overline{\mathscr{D}}_{\dot{\alpha}} + \varepsilon_{\dot{\varepsilon}\dot{\alpha}}\overline{\mathscr{D}}_{\dot{\gamma}})G_{\gamma\dot{\delta}}$$

$$(8)\ R_{ed\gamma\alpha} = \frac{1}{4}\overline{\sigma}_e{}^{\dot{\varepsilon}\varepsilon}\overline{\sigma}_d{}^{\dot{\delta}\delta} R_{\varepsilon\dot{\varepsilon}\delta\dot{\delta}\gamma\alpha}$$

$$R_{ed\dot{\gamma}\dot{\alpha}} = \frac{1}{4}\overline{\sigma}_e{}^{\dot{\varepsilon}\varepsilon}\overline{\sigma}_d{}^{\dot{\delta}\delta} R_{\varepsilon\dot{\varepsilon}\delta\dot{\delta}\dot{\gamma}\dot{\alpha}}$$

$$R_{\varepsilon\dot{\varepsilon}\delta\dot{\delta}\dot{\gamma}\dot{\alpha}} = -2\varepsilon_{\varepsilon\delta}\overline{\mathrm{X}}_{\dot{\varepsilon}\dot{\delta}\dot{\gamma}\dot{\alpha}} + 2\varepsilon_{\dot{\varepsilon}\dot{\delta}}\Psi_{\varepsilon\delta\dot{\gamma}\dot{\alpha}}$$

$$R_{\varepsilon\dot{\varepsilon}\delta\dot{\delta}\gamma\alpha} = 2\varepsilon_{\dot{\varepsilon}\dot{\delta}}\mathrm{X}_{\varepsilon\delta\gamma\alpha} - 2\varepsilon_{\varepsilon\delta}\overline{\Psi}_{\dot{\varepsilon}\dot{\delta}\gamma\alpha}$$

$$\mathrm{X}_{\gamma\delta\varepsilon\alpha} = -\frac{1}{4}(\mathscr{D}_\gamma W_{\delta\varepsilon\alpha} + \mathscr{D}_\delta W_{\varepsilon\alpha\gamma} + \mathscr{D}_\varepsilon W_{\alpha\gamma\delta} + \mathscr{D}_\alpha W_{\gamma\delta\varepsilon}) + (\varepsilon_{\gamma\alpha}\varepsilon_{\varepsilon\delta} + \varepsilon_{\delta\alpha}\varepsilon_{\varepsilon\gamma})\left\{-2RR^+ + \frac{1}{8}G_{\rho\dot{\rho}}G^{\rho\dot{\rho}} + \frac{1}{16}(\overline{\mathscr{D}}_{\dot{\rho}}\overline{\mathscr{D}}^{\dot{\rho}}R^+ + \mathscr{D}^\rho\mathscr{D}_\rho R)\right\}$$

$$\begin{aligned}\Psi_{\varepsilon\alpha\dot{\gamma}\dot{\delta}} &= \overline{\Psi}_{\dot{\gamma}\dot{\delta}\varepsilon\alpha} \\ &= \frac{1}{4}(G_{\varepsilon\dot{\delta}}G_{\alpha\gamma} + G_{\alpha\dot{\delta}}G_{\varepsilon\dot{\gamma}}) \\ &\quad + \frac{i}{8}(\mathscr{D}_{\alpha\dot{\gamma}}G_{\varepsilon\dot{\delta}} + \mathscr{D}_{\varepsilon\dot{\gamma}}G_{\alpha\dot{\delta}} + \mathscr{D}_{\alpha\dot{\delta}}G_{\varepsilon\dot{\gamma}} + \mathscr{D}_{\varepsilon\dot{\delta}}G_{\alpha\dot{\gamma}}) \\ &\quad + \frac{1}{8}(\overline{\mathscr{D}}_{\dot{\gamma}}\mathscr{D}_\alpha G_{\varepsilon\dot{\delta}} + \overline{\mathscr{D}}_{\dot{\gamma}}\mathscr{D}_\varepsilon G_{\alpha\dot{\delta}} + \overline{\mathscr{D}}_{\dot{\delta}}\mathscr{D}_\alpha G_{\varepsilon\dot{\gamma}} + \overline{\mathscr{D}}_{\dot{\delta}}\mathscr{D}_\varepsilon G_{\alpha\dot{\gamma}}).\end{aligned} \tag{15.39}$$

ほかのすべての項は消える．

大いに注目すべきは，これらの関係式が曲率 (12.31) から出るビアンキ恒等式をも同時に解くことである．

$$\begin{gathered}\mathscr{D}R = 0 \\ E^C E^D E^E[\mathscr{D}_E R_{DCA}{}^B + T_{ED}{}^F R_{FCA}{}^B] = 0.\end{gathered} \tag{15.40}$$

文　献

R. Grimm, J. Wess, and B. Zumino, Nucl. Phys. **B152**, 255 (1979).
N. Dragon, Z. Phys. **C2**, 29 (1979).

演　習

(1) 式 (15.20) が，恒等式 (2)，(8) の解であることを示せ.

(2) 恒等式 (13) から条件 (15.24) を導け.

(3) 恒等式 (5) が式 (15.32) を意味することを示せ.

(4) 式 (15.38) と式 (15.39) が式 (15.40) を満たすことを示せ.

16. 超ゲージ変換

前の数章でわれわれは超空間の一般座標変換

$$z'^M = z^M - \xi^M(z) \tag{16.1}$$

を考えた．われわれはまた，構造群を導入してその変換則 (12.18) を探った．本章では，超ゲージ変換を定義する．超ゲージ変換は，超空間の一般座標と構造群との変換から構築される．それは，これらの変換の便利な再媒介変数化（reparametrization）に等しい．超ゲージ変換はローレンツ・テンソルをローレンツ・テンソルに写像し，平坦空間の極限では超対称変換に縮小（reduce）する．

パラメーター ξ が，座標の無限小変化を特徴付ける．それは，アインシュタイン，または，ローレンツどちらかの添字をもつ．

$$\xi^A = \xi^M E_M{}^A. \tag{16.2}$$

ξ^A，または，ξ^M が，場に依存しない変換パラメーターとして選ばれることに注目せよ．そのとき，その相棒は多脚場を通じて場に依存する．われわれは，ローレンツ・テンソルをローレンツ・テンソルに変換したいので，ξ^A を場に依存しないように選ぶ．

さて，パラメーター ξ^A を用いて，テンソル超場の変換性を書く．

$$\delta V^A = -\xi^M \partial_M V^A + V^B L_B{}^A. \tag{16.3}$$

式 (16.3) で，V^A は一般的なテンソル場を表し，ローレンツ群の表現 L は V のテンソル構造に対応する．スカラー場に対しては，

$$\delta V = -\xi^M \partial_M V = -\xi^A E_A{}^M \partial_M V = -\xi^A \mathscr{D}_A V. \tag{16.4}$$

一方，テンソル場に対しては，

$$\delta V^A = -\xi^B E_B{}^M \partial_M V^A + V^B L_B{}^A \tag{16.5}$$

となる．一見してわかるように，式 (16.5) はローレンツ変換のもとで共変的ではない．式 (16.5) の中の微分は共変微分

$$\begin{aligned} \mathscr{D}_M V^A &= \partial_M V^A + (-)^{mb} V^B \phi_{MB}{}^A \\ \mathscr{D}_B V^A &= E_B{}^M \mathscr{D}_M V^A \end{aligned} \tag{16.6}$$

でおき換えられなければならない．式 (16.6) を式 (16.5) に代入して，われわれは

$$\delta V^A = -\xi^B \mathscr{D}_B V^A + V^B \xi^C \phi_{CB}{}^A + V^B L_B{}^A \tag{16.7}$$

を得る．接続 $\phi_{CB}{}^A$ がリー代数値なので $\xi^C \phi_{CB}{}^A$ は V^B に対して場に依存する（field-dependent）ローレンツ変換のように作用する．もし，

$$L_B{}^A = -\xi^C \phi_{CB}{}^A \tag{16.8}$$

とおけば，任意のテンソル場 V^A に対して

$$\delta_\xi V^A = -\xi^C \mathscr{D}_C V^A \tag{16.9}$$

を得る．式 (16.9) はローレンツ変換に対して明白に共変的である．

条件 (16.8) が，超ゲージ変換を定義する．超ゲージ変換は，場に依存しないパラメーター ξ^A をもつ一般座標変換とそれに続く場に依存するパラメーターをもつ構造群ローレンツ変換 $L_B{}^A = -\xi^C \phi_{CB}{}^A$ とからなっている．われわれが，ゲージ化された超対称変換を見つけるのは変換のこの制限された類の中である．

さて，二つの超ゲージ変換の交換関係を計算しよう．パラメーター ξ^A は場に依存しないので，

$$\delta_\eta \delta_\xi V^A = -\xi^C \delta_\eta \mathscr{D}_C V^A = \xi^C \eta^B \mathscr{D}_B \mathscr{D}_C V^A \tag{16.10}$$

であるから，

$$(\delta_\eta \delta_\xi - \delta_\xi \delta_\eta) V^A = \xi^C \eta^B (\mathscr{D}_B \mathscr{D}_C - (-)^{bc} \mathscr{D}_C \mathscr{D}_B) V^A \tag{16.11}$$

を得る．この表現はビアンキ恒等式 (12.29)：

$$\mathscr{D}\mathscr{D} V^A = V^B R_B{}^A \tag{16.12}$$

を使うと容易に計算できる．ここで $R_B{}^A$ はリー代数値曲率 2–形式，V^A はテンソル 0–形式である．式 (15.2) でのように，

$$\begin{aligned}\mathscr{D}\mathscr{D}V^A &= \mathscr{D}(E^B\mathscr{D}_BV^A)\\ &= E^B\mathscr{D}(\mathscr{D}_BV^A)+(\mathscr{D}E^B)\mathscr{D}_BV^A\\ &= E^BE^C\mathscr{D}_C\mathscr{D}_BV^A+T^B\mathscr{D}_BV^A\end{aligned} \tag{16.13}$$

と書く．式 (16.12) を代入して，

$$E^BE^C\mathscr{D}_C\mathscr{D}_BV^A = V^DR_D{}^A - T^D\mathscr{D}_DV^A, \tag{16.14}$$

または，係数関数に対して

$$(\mathscr{D}_C\mathscr{D}_B-(-)^{bc}\mathscr{D}_B\mathscr{D}_C)V^A = (-)^{d(c+b)}V^DR_{CBD}{}^A - T_{CB}{}^D\mathscr{D}_DV^A \tag{16.15}$$

を得る．これは，交換関係 (16.11) が場に依存するローレンツ変換と式 (16.9) の型の場に依存しない変換とで閉じることを示している：

$$(\delta_\eta\delta_\xi-\delta_\xi\delta_\eta)V^A = V^D\xi^C\eta^BR_{BCD}{}^A - \xi^C\eta^BT_{BC}{}^D\mathscr{D}_DV^A. \tag{16.16}$$

平坦な超空間では，曲率は消え捩率は σ–行列に比例し，式 (16.16) はなじみの形となる：

$$(\delta_\eta\delta_\xi-\delta_\xi\delta_\eta)V^A = -2i(\eta\sigma^m\bar{\xi}-\xi\sigma^m\bar{\eta})\partial_mV^A. \tag{16.17}$$

ξ と η の $\theta=\bar{\theta}=0$ 成分は二つの超対称変換 (3.4) の交換関係を与えるので，式 (16.9) は実際にゲージ化された超対称変換を引き起こしている．

われわれは，超ゲージ変換の下での多脚場と接続の変化を計算して，本章を終える．一般に，多脚場の変換性は式 (14.5)，(14.6) によって与えられる：

$$\begin{aligned}\delta E_M{}^A &= -\xi^L\partial_LE_M{}^A-\partial_M\xi^LE_L{}^A+E_M{}^BL_B{}^A\\ &= -\xi^L(\partial_LE_M{}^A-(-)^{\ell m}\partial_ME_L{}^A)-\partial_M\xi^A+E_M{}^BL_B{}^A\\ &= -\partial_M\xi^A-\xi^L(T_{LM}{}^A-\phi_{LM}{}^A+(-)^{m\ell}\phi_{ML}{}^A)+E_M{}^BL_B{}^A.\end{aligned} \tag{16.18}$$

ここで，捩率の定義 (14.15) を使った．接続 $\phi_{ML}{}^{A}$ が $\partial_M \xi^A$ と束になって共変微分をつくる．特殊なローレンツ変換 (16.8) を代入して，次の超ゲージ変換則を得る：

$$\delta_\xi E_M{}^A = -\mathscr{D}_M \xi^A - \xi^B T_{BM}{}^A. \qquad \textbf{(16.19)}$$

接続に対しても同様に進めて：

$$\begin{aligned}\delta\phi_{MA}{}^{B} = &-\xi^L \partial_L \phi_{MA}{}^{B} - (\partial_M \xi^L)\phi_{LA}{}^{B} \\ &+\phi_{MA}{}^{C} L_C{}^B - (-)^{m(a+c)} L_A{}^C \phi_{MC}{}^{B} \\ &-\partial_M L_A{}^B.\end{aligned} \qquad (16.20)$$

超ゲージ変換に対しては，これは次のようになる．

$$\delta_\xi \phi_{MA}{}^{B} = -\xi^C R_{CMA}{}^{B}. \qquad \textbf{(16.21)}$$

この関係の証明は読者に演習 (3) として残した．

変換則 (16.9)，(16.19)，(16.21) が，すべての独立な超重力成分場を計算することを可能にしている．次章でこれを行う．

文　　献

J. Wess and B. Zumino, Phys. Lett. **79B**, 394 (1978).

J. Wess in "Quantum Flavordynamics, Quantum Chromodynamics, and Unified Theories," K. T. Mahanthappa and J. Randa, eds., New York, Plenum (1980).

重 要 な 式

$$\delta V^A = -\xi^B E_B{}^M \partial_M V^A + V^B L_B{}^A \qquad \textbf{(16.5)}$$

$$\delta V^A = -\xi^B \mathscr{D}_B V^A + V^B \xi^C \phi_{CB}{}^A + V^B L_B{}^A \qquad \textbf{(16.7)}$$

$$\delta_\xi V^A = -\xi^C \mathscr{D}_C V^A \qquad \textbf{(16.9)}$$

$$(\mathscr{D}_C \mathscr{D}_B - (-)^{bc} \mathscr{D}_B \mathscr{D}_C) V^A = (-)^{d(c+b)} V^D R_{CBD}{}^A - T_{CB}{}^D \mathscr{D}_D V^A \qquad \textbf{(16.15)}$$

$$(\delta_\eta\delta_\xi-\delta_\xi\delta_\eta)V^A=V^D\xi^C\eta^B R_{BCD}{}^A-\xi^C\eta^B T_{BC}{}^D\mathscr{D}_D V^A \quad \textbf{(16.16)}$$

$$\delta_\xi E_M{}^A=-\mathscr{D}_M\xi^A-\xi^B T_{BM}{}^A \quad \textbf{(16.19)}$$

$$\delta_\xi\phi_{MA}{}^B=-\xi^C R_{CMA}{}^B \quad \textbf{(16.21)}$$

演　　習

(1)　反変ベクトル V^A に対して，式 (16.15) が

$$(\mathscr{D}_C\mathscr{D}_B-(-)^{bc}\mathscr{D}_B\mathscr{D}_C)V^A=-(-)^d R_{CB}{}^A{}_D V^D-T_{CB}{}^D\mathscr{D}_D V^A$$

となることを示せ.

(2)　共変ベクトルの共変微分の定義

$$\mathscr{D}_M V_A=\partial_M V_A-\phi_{MA}{}^B V_B$$

を使って，共変ベクトル V_B に対して演習 (1) に対応するものを求めよ.

(3)　式 (14.22) を使って，式 (16.21) を証明せよ.

17. 多脚場，接続，捩率，曲率の $\theta = \overline{\theta} = 0$ 成分

第 14 章で，超重力理論の力学変数である多脚場と接続で捩率と曲率を定義した．構築上から，すべての超場はその展開係数が x に依存する成分場である．本章では捩率と曲率の成分が，R，G，多脚場の最低次の成分で表されることをみる．多脚場と接続についても同じことが成り立つ．これは，R，G と E の最低次の成分が物理的超重力自由度であることを意味している．残りの自由度は純粋なゲージ（自由度）で，変換で消し去ることができる．

変換のパラメーター ξ^A と L_{ab} は超空間の関数である．それらの最低次の成分が，4 次元 x–空間の一般座標変換 $[\xi^\alpha(x)]$，ゲージ化された超対称変換 $[\xi^\alpha(x),\ \xi_\alpha(x)]$ と局所ローレンツ変換 $[L_{ab}(x)]$ を特徴付ける．より高次の成分は，多脚場と接続の特定の $\theta = \overline{\theta} = 0$ 成分を変換で消すために用いられる．

最初に，多脚場を考える．その変換則 (16.18) は超ゲージ変換 (16.19) に付加的なローレンツ変換 $L_B{}^A$

$$\delta E_M{}^A = -\mathscr{D}_M \xi^A - \xi^B T_{BM}{}^A + E_M{}^B L_B{}^A \tag{17.1}$$

を一緒にしたものである．この式の最低次の成分が，$E_M{}^A|_{\theta=\overline{\theta}=0}$ の変換性を与える．ξ^A の高次成分が共変微分 $\mathscr{D}_\mu \xi^A$ と $\overline{\mathscr{D}}^{\dot{\mu}} \xi^A$ を通じて $\delta E_M{}^A|$ に入ってくる．これらのより高次の成分を使って $E_M{}^A|$ を次の形に変換する（演習 (1) 参照）．

$$E_M{}^A(z)|_{\theta=\overline{\theta}=0} = \begin{pmatrix} e_m{}^a(x) & \frac{1}{2}\psi_m{}^\alpha(x) & \frac{1}{2}\overline{\psi}_{m\dot{\alpha}}(x) \\ 0 & \delta_\mu{}^\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \delta^\mu{}_{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}. \tag{17.2}$$

場 $e_m{}^a$，$\psi_m{}^\alpha \psi_{m\dot{\alpha}}$ は，ゲージ変換で消去できない．それらは，スピン–2 グラビトン（重力子）とスピン–3/2 グラビティーノである．逆多脚場 $E_A{}^M|$ は類似な構造，

$$E_A{}^M(z)|_{\theta=\overline{\theta}=0} = \begin{pmatrix} e_a{}^m(x) & -\frac{1}{2}\psi_a{}^\mu(x) & -\frac{1}{2}\overline{\psi}_{a\dot{\mu}}(x) \\ 0 & \delta_\alpha{}^\mu & 0 \\ 0 & 0 & \delta^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\mu}} \end{pmatrix} \tag{17.3}$$

をもつ．ここで，

$$\begin{aligned} e_a{}^m e_m{}^b &= \delta_a{}^b \\ \psi_a{}^\mu &= e_a{}^m \psi_m{}^\alpha \delta_\alpha{}^\mu \\ \overline{\psi}_{a\dot{\mu}} &= e_a{}^m \overline{\psi}_{m\dot{\alpha}} \delta^{\dot{\alpha}}{}_\mu \end{aligned} \tag{17.4}$$

である．

われわれは，今度は接続を考える．その変換則 (16.20) は，超ゲージ変換とローレンツ変換が組み合わされた一つの変換：

$$\begin{aligned} \delta\phi_{MA}{}^B = &-\xi R_{CMA}{}^B + \phi_{MA}{}^C L_C{}^B \\ &-(-)^{m(a+c)} L_A{}^C \phi_{MC}{}^B - \partial_M L_A{}^B \end{aligned} \tag{17.5}$$

とも書ける．$\phi_{\mu A}{}^B|$ と $\phi^{\dot{\mu}}{}_A{}^B|$ を変換で消し去るために $L_A{}^B$ のより高次の成分を使う．これが可能なのは，$\phi_{MA}{}^B$ がリー代数値：

$$\begin{aligned} \phi_{mA}{}^B(z)|_{\theta=\overline{\theta}=0} &= \omega_{mA}{}^B(x) \\ \phi_{\mu A}{}^B(z)|_{\theta=\overline{\theta}=0} &= \phi^{\dot{\mu}}{}_A{}^B(z)|_{\theta=\overline{\theta}=0} = 0 \end{aligned} \tag{17.6}$$

であるからである．$E|$ と $\phi|$ のさらなる成分をゲージ変換で消し去ることはできない．

通常の相対性理論では，接続を 4 脚場で表すことができる．これは，捩率が消えるように拘束されているからである（演習 (2) 参照）．超重力（理論）でも，われわれは捩率に対して拘束 (14.25) をおく．これらの拘束が，接続を e と ψ で表すことを可能にする．

系統立って進むために，式 (14.15) から出発する．この方程式の $T_{mn}{}^A$ 成分は θ または，$\overline{\theta}$ の微分を含まない．それらは，$T_{mn}{}^A$ を E と ϕ の最低次の成分に関係付ける：

$$\begin{aligned} T_{nm}{}^a &= \partial_n e_m{}^a - \partial_m e_n{}^a + \omega_{nm}{}^a - \omega_{mn}{}^a \\ T_{nm}{}^\alpha &= \frac{1}{2}(\partial_n \psi_m{}^\alpha - \partial_m \psi_n{}^\alpha) + \frac{1}{2}(\psi_m{}^\beta \omega_{n\beta}{}^\alpha - \psi_n{}^\beta \omega_{m\beta}{}^\alpha) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}(\widetilde{\mathscr{D}}_n\psi_m{}^\alpha - \widetilde{\mathscr{D}}_m\psi_n{}^\alpha) = \frac{1}{2}\psi_{nm}{}^\alpha(x)$$

$$T_{nm\dot\alpha}| = \frac{1}{2}\overline{\psi}_{nm\dot\alpha}(x). \tag{17.7}$$

ここで，次の定義を使った：

$$\begin{aligned} \omega_{nm}{}^a &= e_m{}^b\omega_{nb}{}^a \\ \widetilde{\mathscr{D}}_n\psi_m{}^\alpha &= \partial_n\psi_m{}^\alpha + \psi_m{}^\beta\omega_{n\beta}{}^\alpha \\ \psi_{nm}{}^\alpha &= \widetilde{\mathscr{D}}_n\psi_m{}^\alpha - \widetilde{\mathscr{D}}_m\psi_n{}^\alpha. \end{aligned} \tag{17.8}$$

拘束を応用するために，多脚場を通じて $T_{NM}{}^A$ を $T_{CB}{}^A$ に関係付ける．

$$T_{NM}{}^A = E_M{}^B E_N{}^C T_{CB}{}^A(-)^{n(m+b)}. \tag{17.9}$$

式 (17.9) の $\theta = \overline{\theta} = 0$ 成分をとり，拘束を応用すると，

$$\begin{aligned} T_{nm}{}^a| &= E_m{}^\beta E_{n\dot\gamma}T^{\dot\gamma}{}_\beta{}^a| + E_{m\dot\beta}E_n{}^\gamma T_\gamma{}^{\dot\beta a}| \\ &= -\frac{i}{2}(\psi_m\sigma^a\overline{\psi}_n - \psi_n\sigma^a\overline{\psi}_m) \end{aligned} \tag{17.10}$$

と

$$\begin{aligned} T_{nm}{}^\alpha| = &E_m{}^b E_n{}^c T_{cb}{}^\alpha| + E_m{}^b E_n{}^\gamma T_{\gamma b}{}^\alpha| \\ &+E_m{}^\beta E_n{}^c T_{c\beta}{}^\alpha| + E_m{}^b E_{n\dot\gamma}T^{\dot\gamma}{}_b{}^\alpha| \\ &+E_{m\beta}E_n{}^c T_c{}^{\dot\beta\alpha}| \end{aligned} \tag{17.11}$$

を得る．式 (17.10) と式 (17.7) を組み合わせると接続を e，ψ，$\overline{\psi}$ で表すことができて，

$$\begin{aligned} \omega_{nm\ell} = \frac{1}{2}\Big\{ &-\frac{i}{2}e_{\ell a}(\psi_m\sigma^a\overline{\psi}_n - \psi_n\sigma^a\overline{\psi}_m) - \frac{i}{2}e_{ma}(\psi_n\sigma^a\overline{\psi}_\ell - \psi_\ell\sigma^a\overline{\psi}_n) \\ &+\frac{i}{2}e_{na}(\psi_\ell\sigma^a\overline{\psi}_m - \psi_m\sigma^a\overline{\psi}_\ell) - e_{\ell a}(\partial_n e_m{}^a - \partial_m e_n{}^a) \\ &- e_{ma}(\partial_\ell e_n{}^a - \partial_n e_\ell{}^a) + e_{na}(\partial_m e_\ell{}^a - \partial_\ell e_m{}^a)\Big\}. \end{aligned} \tag{17.12}$$

われわれは，式 (17.11) を評価しなければならない．この式中の捩率成分は第 15 章で計算した．式 (15.38) の (6) が，$T_{cb}{}^\alpha$ を $W_{\alpha\beta\gamma}$ と $\overline{\mathscr{D}}_{\dot\alpha}G_{B\dot\gamma}$ に関係付ける．式 (15.38)

の (2) と式 (15.38) の (4) が，$T_{\dot{\gamma} b}{}^{\alpha}$ と $T_{\gamma b}{}^{\alpha}$ を R と $G_{\alpha\dot{\beta}}$ に関係付ける．式 (17.7) と式 (17.11) に沿って，$W_{\alpha\beta\gamma}|$ と $\overline{\mathscr{D}}_{\dot{\alpha}} G_{B\dot{\gamma}}|$ を，$e_m{}^a$，$\psi_m{}^{\alpha}$，$\overline{\psi}_{m\dot{\alpha}}$ と，R と $G_{\alpha\dot{\beta}}$ の最低次の成分とで計算するためにこれらの表示を使う．これは演習 (5)，(7) で実行される．

R と $G_{\alpha\dot{\beta}}$ の最低次の成分は $e_m{}^a$，ψ_m^{α}，$\overline{\psi}_{m\dot{\alpha}}$ では表せない．また，ゲージ変換：

$$\begin{aligned} \delta R &= -\xi^C \mathscr{D}_C R \\ \delta G_a &= -\xi^C \mathscr{D}_C G_a + G_b L^b{}_a \end{aligned} \tag{17.13}$$

で消し去ることもできない．これが 2 個の新しい成分場：

$$\begin{aligned} R(z)|_{\theta=\overline{\theta}=0} &= -\frac{1}{6} M(x) \\ G_a(z)|_{\theta=\overline{\theta}=0} &= -\frac{1}{3} b_a(x) \end{aligned} \tag{17.14}$$

の導入を要請する．これらの場が，超重力多重項 M，b，ψ，e の内でのフェルミオン的自由度とボソン的自由度の数を等しくする．われわれは，超重力多重項が力学的な場の完全な組を構成することをみるであろう．

本章をまとめるために，われわれがまだ議論してなかった唯一のテンソル $R_{mnA}{}^B$ で同じ手続きをする．式 (14.22) の $\theta = \overline{\theta} = 0$ 成分をとると，

$$\begin{aligned} R_{nma}{}^b| &= \partial_n \omega_{ma}{}^b - \partial_m \omega_{na}{}^b + \omega_{ma}{}^c \omega_{nc}{}^b - \omega_{na}{}^c \omega_{mc}{}^b \\ &\equiv \mathscr{R}_{nma}{}^b \end{aligned} \tag{17.15}$$

となる．この式は，接続 $\omega_{ma}{}^b$ によってリーマン曲率 $\mathscr{R}_{mna}{}^b$ を定義する．式 (17.11) に類似して，われわれは $R_{mna}{}^b$ をローレンツ共変テンソル $R_{CDa}{}^b$ と次のように関係付ける．

$$\begin{aligned} R_{nma}{}^b &= E_n{}^C E_m{}^D R_{CDa}{}^b (-)^{cd} \\ &= E_n{}^c E_m{}^d R_{cda}{}^b + E_n{}^{\underline{\gamma}} E_m{}^d R_{\underline{\gamma} da}{}^b \\ &\quad + E_n{}^c E_m{}^{\underline{\delta}} R_{c\underline{\delta} a}{}^b - E_n{}^{\underline{\gamma}} R_m{}^{\underline{\gamma}} E_m{}^{\underline{\delta}} R_{\underline{\gamma}\underline{\delta} a}{}^b . \end{aligned} \tag{17.16}$$

下線付きのスピノル添字は，点付と点なしの添字にわたって和をとる．ビアンキ恒等式の解 (15.39) の (8) と比べて，$R_{cda}{}^b$ が R，G の 2 階微分と W の 1 階微分に関係付けられることがわかる．同様に，$R_{\underline{\gamma} da}{}^b$，$R_{\underline{\gamma}\delta a}{}^b$ は，R，G，W と，G の 1 階

微分とに関係付けられる．式 (17.15) と式 (17.16) とを組み合わせると，R，G の 2 階微分と W の 1 階微分について，超重力多重項 M，b，ψ，e を使って解くことができる．計算すべく残されたすべては，R の 1 階微分と W の 2 階微分である．R の 1 階微分は，ビアンキ恒等式を通じて G の 1 階微分に関係付く．それは，演習 (8) で計算する．W の 2 階微分は，演習 (10) で概観される．

本章の結果で，振率と曲率を計算するのに必要なものはすべてそろった．第一段は，R，G，W の成分を超重力多重項で書くことである．これから，われわれは振率と曲率をビアンキ恒等式の解を通じて導くことができる．われわれが必要な R，G，W のこれらの成分は以下に集められている．

文　献

B. Zumino, “Recent Developments in Gravitation,” M. Levy and S. Deser, eds. (Cargése 1978), New York, Plenum (1979).

K. S. Stelle and P. C. West, Phys. Lett. **74B**, 330 (1978).

重 要 な 式

$$\delta E_M{}^A = -\mathscr{D}_M \xi^A - \xi^B T_{BM}{}^A + E_M{}^B L_B{}^A \tag{17.1}$$

$$E_M{}^A(z)|_{\theta=\bar\theta=0} = \begin{pmatrix} e_m{}^a(x) & \frac{1}{2}\psi_m{}^\alpha(x) & \frac{1}{2}\overline{\psi}_{m\dot\alpha}(x) \\ 0 & \delta_\mu{}^\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \delta^{\dot\mu}{}_{\dot\alpha} \end{pmatrix} \tag{17.2}$$

$$E_A{}^M(z)|_{\theta=\bar\theta=0} = \begin{pmatrix} e_a{}^m(x) & -\frac{1}{2}\psi_a{}^\mu(x) & -\frac{1}{2}\overline{\psi}_{a\dot\mu}(x) \\ 0 & \delta_\alpha{}^\mu & 0 \\ 0 & 0 & \delta^{\dot\alpha}{}_{\dot\mu} \end{pmatrix} \tag{17.3}$$

$$\begin{aligned} \delta\phi_{MA}{}^B = &-\xi R_{CMA}{}^B + \phi_{MA}{}^C L_C{}^B \\ &-(-)^{m(a+c)} L_A{}^C \phi_{MC}{}^B - \partial_M L_A{}^B \end{aligned} \tag{17.5}$$

$$\begin{aligned} \phi_{mA}{}^B(z)|_{\theta=\bar\theta=0} &= \omega_{mA}{}^B(x) \\ \phi_{\mu A}{}^B(z)|_{\theta=\bar\theta=0} &= \phi^{\dot\mu}{}_A{}^B(z)|_{\theta=\bar\theta=0} = 0 \end{aligned} \tag{17.6}$$

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathscr{D}}_n \psi_m{}^\alpha &= \partial_n \psi_m{}^\alpha + \psi_m{}^\beta \omega_{n\beta}{}^\alpha \\ \psi_{nm}{}^\alpha &= \widetilde{\mathscr{D}}_n \psi_m{}^\alpha - \widetilde{\mathscr{D}}_m \psi_n{}^\alpha \end{aligned} \tag{17.8}$$

$$\omega_{nm\ell}=\frac{1}{2}\left\{-\frac{i}{2}e_{\ell a}(\psi_m\sigma^a\overline{\psi}_n-\psi_n\sigma^a\overline{\psi}_m)-\frac{i}{2}e_{ma}(\psi_n\sigma^a\overline{\psi}_\ell-\psi_\ell\sigma^a\overline{\psi}_n)\right.$$
$$+\frac{i}{2}e_{na}(\psi_\ell\sigma^a\overline{\psi}_m-\psi_m\sigma^a\overline{\psi}_\ell)-e_{\ell a}(\partial_n e_m{}^a-\partial_m e_n{}^a)$$
$$\left.-e_{ma}(\partial_\ell e_n{}^a-\partial_n e_\ell{}^a)+e_{na}(\partial_m e_\ell{}^a-\partial_\ell e_m{}^a)\right\} \qquad \textbf{(17.12)}$$

$$\begin{aligned}\delta R&=-\xi^C\mathscr{D}_C R\\ \delta G_a&=-\xi^C\mathscr{D}_C G_a+G_b L^b{}_a\end{aligned} \qquad \textbf{(17.13)}$$

$$\begin{aligned}R(z)|_{\theta=\overline{\theta}=0}&=-\frac{1}{6}M(x)\\ G_a(z)|_{\theta=\overline{\theta}=0}&=-\frac{1}{3}b_a(x)\end{aligned} \qquad \textbf{(17.14)}$$

$$\begin{aligned}R_{nma}{}^b|&=\partial_n\omega_{ma}{}^b-\partial_m\omega_{na}{}^b+\omega_{ma}{}^c\omega_{nc}{}^b-\omega_{na}{}^c\omega_{mc}{}^b\\ &\equiv\mathscr{R}_{nma}{}^b\end{aligned} \qquad \textbf{(17.15)}$$

$$W_{\delta\gamma\alpha}|=\frac{1}{2\cdot 4!}\sum_{P(\delta\gamma\alpha)}(\psi_{\delta\dot{\delta}\gamma}{}^{\dot{\delta}}{}_\alpha+i\psi_{\delta\dot{\gamma}\gamma}b_\alpha{}^{\dot{\gamma}}) \qquad \textbf{(5)}$$

$$\begin{aligned}\mathscr{D}_\delta G_{\alpha\dot{\alpha}}|&=\frac{1}{4}\overline{\psi}_\alpha{}^{\dot{\gamma}}{}_{\delta\dot{\gamma}\dot{\alpha}}+\frac{1}{12}\varepsilon_{\delta\alpha}\overline{\psi}^{\gamma\dot{\gamma}}{}_{\gamma\dot{\alpha}\dot{\gamma}}-\frac{i}{6}\psi_{\alpha\dot{\alpha}\delta}M^*\\ &\quad+\frac{i}{12}(\overline{\psi}_{\alpha\dot{\rho}}{}^{\dot{\rho}}b_{\delta\dot{\alpha}}+\overline{\psi}_{\delta\dot{\rho}}{}^{\dot{\rho}}b_{\alpha\dot{\alpha}}-\overline{\psi}_\delta{}^{\dot{\rho}}{}_{\dot{\alpha}}b_{\alpha\dot{\rho}})\\ \overline{\mathscr{D}}_{\dot{\delta}}G_{\alpha\dot{\alpha}}|&=\frac{1}{4}\psi^\gamma{}_{\dot{\delta}\gamma\dot{\alpha}\alpha}+\frac{1}{12}\varepsilon_{\dot{\delta}\dot{\alpha}}\psi_\alpha{}^{\dot{\gamma}\gamma}{}_{\dot{\gamma}\gamma}+\frac{i}{6}\overline{\psi}_{\alpha\dot{\alpha}\dot{\delta}}M\\ &\quad-\frac{i}{12}(\psi_{\rho\dot{\alpha}}{}^\rho b_{\alpha\dot{\delta}}+\psi_{\rho\dot{\delta}}{}^\rho b_{\alpha\dot{\alpha}}-\psi^\rho{}_{\dot{\delta}\alpha}b_{\rho\dot{\alpha}})\end{aligned} \qquad \textbf{(7)}$$

$$\begin{aligned}\mathscr{D}_\alpha R|&=-\frac{1}{3}(\sigma^{ab})_\alpha{}^\beta\psi_{ab\beta}+\frac{i}{6}(\sigma^a\overline{\psi}_a)_\alpha M-\frac{i}{6}\psi_{a\alpha}b^a\\ \overline{\mathscr{D}}^{\dot{\alpha}}R^+|&=-\frac{1}{3}(\overline{\sigma}^{ab})^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}}\overline{\psi}_{ab}{}^{\dot{\beta}}+\frac{i}{6}(\overline{\sigma}^a\psi_a)^{\dot{\alpha}}M^*+\frac{i}{6}\overline{\psi}_a{}^{\dot{\alpha}}b^a\end{aligned} \qquad \textbf{(8)}$$

演　　習

(1) $E_M{}^A$ が式 (17.2) の形にゲージ化されることを示せ．ξ の高次成分の自由度

$$\xi^A=\xi^{(0,0)A}(x)+\theta^\mu\xi_\mu{}^{(1,0)A}(x)+\overline{\theta}_{\dot{\mu}}\overline{\xi}^{\dot{\mu}(0,1)A}(x)+\cdots$$
$$\mathscr{D}_\mu\xi^A=\frac{\partial}{\partial\theta^\mu}\xi^A+\cdots$$

$$\overline{\mathscr{D}}^{\dot{\mu}}\xi^A = \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}_{\dot{\mu}}}\xi^A\cdots$$

を用いよ．

(2)　通常の 4 次元相対論では，捩率は

$$T_{nm}{}^a = \partial_n e_m{}^a - \partial_m e_n{}^a + \omega_{nm}{}^a - \omega_{mn}{}^a.$$

拘束 $T_{nm}{}^a = 0$ を課して，ω について e を用いて解け．

(3)　式 (17.7) と式 (17.10) を，$\omega_{nm\ell}$ について解け．

$$\omega_{mn\ell} = e_{\ell a}e_n{}^b\omega_{mb}{}^a = -\omega_{m\ell n}$$

なる事実を使え．

(4)　定義

$$\psi_{\delta\gamma\gamma} = \sigma_{\delta\dot{\gamma}}{}^a e_a{}^m\psi_{m\gamma}$$

$$\psi_{\delta\dot{\delta}\gamma\dot{\gamma}\alpha} = \sigma_{\delta\dot{\delta}}{}^d\sigma_{\gamma\dot{\gamma}}{}^c e_d{}^n e_c{}^m\psi_{nm\alpha}$$

を用い，式 (17 7)，(17.11) に沿って，

$$T_{\delta\dot{\delta}\gamma\dot{\gamma}\alpha}| = \frac{1}{2}\psi_{\delta\dot{\delta}\gamma\dot{\gamma}\alpha} - \frac{1}{2}(\psi_{\delta\dot{\delta}}{}^\rho T_{\rho\gamma\dot{\gamma}\alpha}| - \psi_{\gamma\dot{\gamma}}{}^\rho T_{\rho\delta\dot{\delta}\alpha}|)$$
$$+\frac{1}{2}(\overline{\psi}_{\delta\dot{\delta}}{}^{\dot{\rho}}T_{\dot{\rho}\gamma\dot{\gamma}\alpha}| - \overline{\psi}_{\gamma\gamma}{}^{\dot{\rho}}T_{\dot{\rho}\delta\dot{\delta}\alpha})$$

を証明せよ．

(5)　演習 (4) とビアンキ恒等式の解から

$$W_{\delta\gamma\alpha}| = \frac{1}{2\cdot 4!}\sum_{P(\delta\gamma\alpha)}(\psi_{\delta\dot{\delta}\gamma}{}^{\dot{\delta}}{}_\alpha + i\psi_{\delta\dot{\gamma}\gamma}b_\alpha{}^{\dot{\gamma}})$$

を示せ．

(6)　ビアンキ恒等式の解を使って

$$\mathscr{D}_\delta G_{\alpha\dot{\alpha}} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\dot{\gamma}\dot{\delta}}T_{\alpha\dot{\delta}\delta\dot{\gamma}\dot{\alpha}} + \frac{1}{6}\varepsilon_{\delta\alpha}\varepsilon^{\gamma\lambda}\varepsilon^{\dot{\lambda}\dot{\delta}}T_{\lambda\dot{\delta}\gamma\dot{\alpha}\dot{\lambda}}$$

$$\overline{\mathscr{D}}_{\dot{\delta}}G_{\alpha\dot{\alpha}} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\gamma\delta}T_{\delta\dot{\delta}\gamma\dot{\alpha}\alpha} - \frac{1}{6}\varepsilon_{\dot{\delta}\dot{\alpha}}\varepsilon^{\dot{\lambda}\dot{\gamma}}\varepsilon^{\delta\gamma}T_{\gamma\dot{\lambda}\alpha\dot{\gamma}\delta}$$

を示せ．

(7) 超重力多重項を用いて，$\mathscr{D}_\delta G_{\alpha\dot\alpha}|$ と $\overline{\mathscr{D}}_{\dot\delta} G_{\alpha\dot\alpha}|$ を，超重力多重項を用いて計算せよ．

$$\begin{aligned}\mathscr{D}_\delta G_{\alpha\dot\alpha}| &= \frac{1}{4}\overline{\psi}_\alpha{}^{\dot\gamma}{}_{\delta\dot\gamma\dot\alpha} + \frac{1}{12}\varepsilon_{\delta\alpha}\overline{\psi}^{\gamma\dot\gamma}{}_{\gamma\dot\alpha\dot\gamma} - \frac{i}{6}\psi_{\alpha\dot\alpha\delta}M^* \\ &\quad + \frac{i}{12}(\overline{\psi}_{\alpha\dot\rho}{}^{\dot\rho}b_{\delta\dot\alpha} + \overline{\psi}_{\delta\dot\rho}{}^{\dot\rho}b_{\alpha\dot\alpha} - \overline{\psi}_\delta{}^{\dot\rho}{}_{\dot\alpha}b_{\alpha\dot\rho}) \\ \overline{\mathscr{D}}_{\dot\delta} G_{\alpha\dot\alpha}| &= \frac{1}{4}\psi^\gamma{}_{\dot\delta\gamma\alpha\alpha} + \frac{1}{12}\varepsilon_{\dot\delta\dot\alpha}\psi_\alpha{}^{\dot\gamma\gamma}{}_{\dot\gamma\gamma} + \frac{i}{6}\overline{\psi}_{\alpha\dot\alpha\dot\delta}M \\ &\quad - \frac{i}{12}(\psi_{\rho\dot\alpha}{}^\rho b_{\alpha\dot\delta} + \psi_{\rho\dot\delta}{}^\rho b_{\alpha\dot\alpha} - \psi^\rho{}_{\dot\delta\alpha}b_{\rho\dot\alpha}).\end{aligned}$$

(8) 式 (15.37) の (2) と演習 (7) の結果を使って，$\mathscr{D}_\alpha R|$ と $\overline{\mathscr{D}}^{\dot\alpha}R^+|$ を，超重力多重項を用いて計算せよ．

$$\begin{aligned}\mathscr{D}_\alpha R| &= -\frac{1}{3}(\sigma^{ab})_\alpha{}^\beta\psi_{ab\beta} + \frac{i}{6}(\sigma^a\overline{\psi}_a)_\alpha M - \frac{i}{6}\psi_{a\alpha}b^a \\ \overline{\mathscr{D}}^{\dot\alpha}R^+| &= -\frac{1}{3}(\overline{\sigma}^{ab})^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta}\overline{\psi}_{ab}{}^{\dot\beta} + \frac{i}{6}(\overline{\sigma}^a\psi_a)^{\dot\alpha}M^* + \frac{i}{6}\overline{\psi}_a{}^{\dot\alpha}b^a.\end{aligned}$$

(9) F を R で表示して，ビアンキ恒等式 (12.31) を次の形で書け．

$$E^C E^D E^E\{\mathscr{D}_E R_{DCA}{}^B + T_{ED}{}^F R_{FCA}{}^B\} = 0.$$

これは，

$$\begin{aligned}&\overline{\mathscr{D}}_{\dot\varepsilon} R_{dc\alpha}{}^\beta + \mathscr{D}_d R_{c\dot\varepsilon\alpha}{}^\beta + \mathscr{D}_c R_{\dot\varepsilon d\alpha}{}^\beta \\ &\qquad + T_{\dot\varepsilon d}{}^F R_{Fc\alpha}{}^\beta + T_{dc}{}^F R_{F\dot\varepsilon\alpha}{}^\beta + T_{c\dot\varepsilon}{}^F R_{Fd\alpha}{}^\beta = 0\end{aligned}$$

を意味することを示せ．

(10) ビアンキ恒等式の解と前の演習の結果を使って $\mathscr{D}\mathscr{D}W$ が計算できることを示せ．（警告：実際の計算は冗長！）

18. 超重力多重項

われわれは，超重力多重項 $e_m{}^a$，$\psi_m{}^\alpha$，$\overline{\psi}_{m\dot{\alpha}}$，$b_a$，$M$ の変換性を導く準備ができた．われわれは，多脚場の一般的な変換則

$$\delta E_M{}^A = -\mathscr{D}_M \xi^A - \xi^B T_{BM}{}^A + E_M{}^B L_B{}^A \tag{18.1}$$

から出発し，その最低次の成分を評価する．ξ^α と $\overline{\xi}_{\dot{\alpha}}$ の $\theta = \overline{\theta} = 0$ 成分がゲージ化された超対称変換を媒介変数表示（parametrize）する．われわれは，

$$\begin{aligned}
\xi^a(z)|_{\theta=\overline{\theta}=0} &= 0 \\
\xi^\alpha(z)|_{\theta=\overline{\theta}=0} &= \zeta^\alpha(x) \\
\overline{\xi}_{\dot{\alpha}}(z)|_{\theta=\overline{\theta}=0} &= \overline{\zeta}_{\dot{\alpha}}(x) \\
L_{AB}(z)|_{\theta=\overline{\theta}=0} &= 0
\end{aligned} \tag{18.2}$$

として，これらに焦点を合わせる．ξ^A と L_{AB} の高次の成分は，ゲージ (17.2) と (17.6) を保つように選ばれる．

式 (17.2) を保つために

$$\delta E_\mu{}^A| = \delta E^{\dot{\mu}A}| = 0 \tag{18.3}$$

を要求しなければならない．式 (18.1) と拘束 (14.25) から

$$\begin{aligned}
\delta E_\mu{}^a| &= \left(-\frac{\partial}{\partial \theta^\mu}\xi^a - \xi^b \phi_{\mu b}{}^a - \overline{\xi}_{\dot{\beta}} T^{\dot{\beta}}{}_\mu{}^a + E_\mu{}^b L_b{}^a \right) \Bigg| \\
&= -\frac{\partial}{\partial \theta^\mu}\xi^a \Bigg| + 2i\sigma_{\mu\dot{\beta}}{}^a \overline{\zeta}^{\dot{\beta}} = 0 \\
\delta E^{\dot{\mu}a}| &= -\frac{\partial}{\partial \overline{\theta}_{\dot{\mu}}}\xi^a \Bigg| + 2i\zeta^\beta \sigma_{\beta\dot{\kappa}}{}^a \varepsilon^{\dot{\kappa}\dot{\mu}} = 0
\end{aligned} \tag{18.4}$$

であることがわかる．もし

$$\xi^a = 2i(\theta\sigma^a\overline{\zeta} - \zeta\sigma^a\overline{\theta}) \tag{18.5}$$

ならば式 (18.4) が満たされる．式 (18.3) からさらに条件は出ない．

式 (17.6) を保つために

$$\delta\phi_{\mu A}{}^{B}| = \delta\phi^{\dot{\mu}}{}_{A}{}^{B}| = 0 \tag{18.6}$$

を要求しなければならない．式 (16.20) から

$$\delta\phi_{\mu\alpha}{}^{\beta}| = -\xi^{C}R_{C\mu\alpha}{}^{\beta}| - \partial_{\mu}L_{\alpha}{}^{\beta}| \tag{18.7}$$

となる．曲率項は消えない．ビアンキ恒等式の解 (15.39) から，それが M と b を含むことがわかっていて，

$$\begin{aligned}
R_{\gamma\mu\alpha\beta}| &= 4(\varepsilon_{\gamma\alpha}\varepsilon_{\mu\beta} + \varepsilon_{\mu\alpha}\varepsilon_{\gamma\beta})R^{+}| \\
&= -\frac{2}{3}(\varepsilon_{\gamma\alpha}\varepsilon_{\mu\beta} + \varepsilon_{\mu\alpha}\varepsilon_{\gamma\beta})M^{*} \\
R_{\dot{\gamma}\mu\alpha\beta}| &= -(\varepsilon_{\mu\alpha}G_{\beta\dot{\gamma}} + \varepsilon_{\mu\beta}G_{\alpha\dot{\gamma}})| \\
&= \frac{1}{3}(\varepsilon_{\mu\alpha}b_{\beta\dot{\gamma}} + \varepsilon_{\mu\beta}b_{\alpha\dot{\gamma}}).
\end{aligned} \tag{18.8}$$

式 (18.8) を式 (18.7) に代入し，式 (18.6) を課すと，

$$\begin{aligned}
\partial_{\mu}L_{\alpha\beta} = &-\frac{2}{3}(\zeta_{\alpha}\varepsilon_{\mu\beta} + \zeta_{\beta}\varepsilon_{\mu\alpha})M^{*} \\
&+\frac{1}{3}(\varepsilon_{\mu\alpha}b_{\beta\dot{\gamma}} + \varepsilon_{\mu\beta}b_{\alpha\dot{\gamma}})\overline{\zeta}^{\dot{\gamma}}
\end{aligned} \tag{18.9}$$

を得る．これは，ゲージ化された超対称変換 ζ_{α} がゲージ (17.6) を保つためには，場に依存するローレンツ変換

$$\begin{aligned}
L_{\alpha\beta} &= \frac{1}{3}[\theta_{\alpha}(2\zeta_{\beta}M^{*} - b_{\beta\dot{\gamma}}\overline{\zeta}^{\dot{\gamma}}) + \theta_{\beta}(2\zeta_{\alpha}M^{*} - b_{\alpha\dot{\gamma}}\overline{\zeta}^{\dot{\gamma}})] \\
L_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} &= \frac{1}{3}[\overline{\theta}_{\dot{\alpha}}(2\overline{\zeta}_{\dot{\beta}}M - \zeta^{\gamma}b_{\gamma\dot{\beta}}) + \overline{\theta}_{\dot{\beta}}(2\overline{\zeta}_{\dot{\alpha}}M - \zeta^{\gamma}b_{\gamma\dot{\alpha}})]
\end{aligned} \tag{18.10}$$

が付随しなければならないことを示している．式 (18.5) と式 (18.10) はゲージ固定からのみの条件である．

まとめると，われわれは，ζ で媒介変数表示される一組の変換を発見した．それはゲージ化された超対称変換を含み，ゲージ (17 2) と (17.6) を保つ．われわれは，これらを超重力変換：

$$
\begin{aligned}
\xi^\alpha(z) &= \zeta^\alpha(x), \qquad \bar{\xi}_{\dot\alpha}(z) = \bar{\zeta}_{\dot\alpha}(x) \\
\xi^a(z) &= 2i[\theta\sigma^a\bar{\zeta}(x) - \zeta(x)\sigma^a\bar{\theta}] \\
L_{\alpha\beta}(z) &= \frac{1}{3}\{\theta_\alpha[2\zeta_\beta(x)M^*(x) - b_{\beta\dot\gamma}(x)\bar{\zeta}^{\dot\gamma}(x)] \\
&\quad +\theta_\beta[2\zeta_\alpha(x)M^*(x) - b_{\alpha\dot\gamma}(x)\bar{\zeta}^{\dot\gamma}(x)]\} \\
L_{\dot\alpha\dot\beta}(z) &= \frac{1}{3}\{\bar{\theta}_{\dot\alpha}[2\bar{\zeta}_{\dot\beta}(x)M(x) - \zeta^\gamma(x)b_{\gamma\dot\beta}(x)] \\
&\quad +\bar{\theta}_{\dot\beta}[2\bar{\zeta}_{\dot\alpha}(x)M(x) - \zeta^\gamma(x)b_{\gamma\dot\alpha}(x)]\} \\
L_{ab} &= \frac{1}{2}(\bar{\sigma}_a\sigma_b\varepsilon)^{\dot\alpha\dot\beta}L_{\dot\alpha\dot\beta} - \frac{1}{2}(\varepsilon\sigma_a\bar{\sigma}_b)^{\alpha\beta}L_{\alpha\beta}
\end{aligned}
\tag{18.11}
$$

とよぶ．われわれは，いまや成分場の変換法則を計算する用意ができている．四脚場から出発する．式 (18.1) と式 (18.11) から

$$
\begin{aligned}
\delta e_m{}^a = \delta E_m{}^a| &= -\mathscr{D}_m\xi^a| - \xi^B T_{Bm}{}^a| \\
&= -\xi^\beta T_{\beta m}{}^a| - \bar{\xi}_{\dot\beta}T^{\dot\beta}{}_m{}^a|
\end{aligned}
\tag{18.12}
$$

がわかる．ζ^a に比例する項は $\theta = \bar{\theta} = 0$ に寄与しない．振率項は，拘束：

$$
\begin{aligned}
T_{\beta m}{}^a &= E_m{}^C T_{\beta C}{}^a(-)^{b(m+c)} \\
&= 2iE_m{}^{\dot\gamma}\sigma_{\beta\dot\gamma}{}^a \\
T_{\dot\beta m}{}^a &= E_m{}^C T_{\dot\beta C}{}^a(-)^{b(m+c)} \\
&= -2iE_m{}^\gamma\sigma_{\gamma\dot\beta}{}^a
\end{aligned}
\tag{18.13}
$$

の助けを借りて評価できる．$\theta = \bar{\theta} = 0$ 成分は式 (17.2) を通じて明記されて：

$$
\begin{aligned}
T_{\beta m}{}^a| &= i\sigma_{\beta\dot\beta}{}^a\bar{\psi}_m{}^{\dot\beta} \\
T_{\dot\beta m}{}^a| &= -i\psi_m{}^\beta\sigma_{\beta\dot\beta}{}^a
\end{aligned}
\tag{18.14}
$$

式 (18.14) を式 (18.12) に代入して四脚場の変換則：

$$
\delta e_m{}^a(x) = i(\psi_m\sigma^a\bar{\zeta} - \zeta\sigma^a\bar{\psi}_m) \tag{18.15}
$$

を得る．

グラビティーノの場合：

$$
\frac{1}{2}\delta\psi_m{}^\alpha = \delta E_m{}^\alpha| = -\mathscr{D}_m\xi^\alpha| - \xi^B T_{Bm}{}^\alpha| \tag{18.16}
$$

に移ろう．前と同様に，

$$T_{\dot{\beta}m}{}^{\alpha} = E_m{}^C T_{\dot{\beta}C}{}^{\alpha}(-)^{b(m+c)}$$
$$T_{\beta m}{}^{\alpha} = E_m{}^C T_{\beta C}{}^{\alpha}(-)^{b(m+c)} \tag{18.17}$$

と書く．ビアンキ恒等式の解（式 (15.38) の (2) と式 (15.38) の (4)）が $T_{\dot{\beta}c}{}^{\alpha}$ と $T_{\beta c}{}^{\alpha}$ を R と G_a で与える：

$$T^{\dot{\beta}}{}_c{}^{\alpha} = -i\overline{\sigma}^{\dot{\beta}\alpha}{}_c R$$
$$T_{\beta c}{}^{\alpha} = \frac{i}{8}\overline{\sigma}^{\dot{\varepsilon}\varepsilon}{}_c\{\delta_{\varepsilon}{}^{\alpha}G_{\beta\dot{\varepsilon}} - 3\delta_{\beta}{}^{\alpha}G_{\varepsilon\dot{\varepsilon}} + 3\varepsilon_{\beta\varepsilon}G^{\alpha}{}_{\dot{\varepsilon}}\}. \tag{18.18}$$

$\theta = \overline{\theta} = 0$ に制限すると，

$$T_{\beta c}{}^{\alpha}| = \frac{i}{6}(\varepsilon\overline{\sigma}_c)_{\dot{\beta}}{}^{\alpha}M$$
$$T_{\beta c}{}^{\alpha}| = -\frac{i}{2}\left\{\frac{1}{3}(\sigma_d\overline{\sigma}_c)_{\beta}{}^{\alpha} + \delta_{\beta}{}^{\alpha}\eta_{cd}\right\}b^d. \tag{18.19}$$

式 (18.19) を式 (18.16) に代入して，グラビティーノに対する変換則

$$\delta\psi_m{}^{\alpha} = -2\mathscr{D}_m\zeta^{\alpha} + \frac{i}{3}e_m{}^a(\varepsilon\sigma_a\overline{\zeta})^{\alpha}M$$
$$+ie_m{}^b\zeta^{\beta}\left(\delta_{\beta}{}^{\alpha}\eta_{bc} + \frac{1}{3}(\sigma_c\overline{\sigma}_b)_{\beta}{}^{\alpha}\right)b^c \tag{18.20}$$

を得る．

$\overline{\psi}$ に対して，同様な計算で[1)]

$$\delta\overline{\psi}_{m\dot{\alpha}} = -2\mathscr{D}_m\overline{\zeta}_{\dot{\alpha}} - \frac{i}{3}e_m{}^a\zeta^{\beta}\sigma_{a\beta\dot{\alpha}}M^*$$
$$-ie_m{}^b\overline{\zeta}_{\dot{\beta}}\left(\delta^{\dot{\beta}}{}_{\dot{\alpha}}\eta_{bc} + \frac{1}{3}(\overline{\sigma}_c\sigma_b)^{\dot{\beta}}{}_{\dot{\alpha}}\right)b^c \tag{18.21}$$

を得る．式 (16.9) から M と b_a に対する変換則：

$$-\frac{1}{6}\delta M = \delta R| = -\xi^{\alpha}\mathscr{D}_{\alpha}R|$$
$$-\frac{1}{3}\delta b_a = \delta G_a| = -(\xi^{\alpha}\mathscr{D}_{\alpha} - \overline{\xi}^{\dot{\alpha}}\overline{\mathscr{D}}_{\dot{\alpha}})G_a| \tag{18.22}$$

[1)]（訳注）式 (18.21) の括弧内の第 2 項の符号が初版と逆になっている．また，遺稿中に $+(1/3)(\varepsilon\overline{\sigma}_c\sigma_b\varepsilon)^{\dot{\beta}}{}_{\dot{\alpha}} = (1/3)(\overline{\sigma}_c\sigma_b)^{\dot{\beta}}{}_{\dot{\alpha}}$ と注が書き込まれている．

が求められる．δM 中で $\overline{\xi}_{\dot\alpha}$ に比例する項は，R がカイラルなので消える．ローレンツ変換 (18.10) は，$\theta=\overline{\theta}=0$ に対しては δG_a に効かない．第 17 章演習 (7)，(8) で $\mathscr{D}_\alpha R|$ と $\mathscr{D}_\alpha G|$ を超重力多重項を用いて計算した．これにより，δM と δb_a は短い計算で求められる．

結論に，われわれの結果を今後の参考のために集めておく[2]．

$$
\begin{aligned}
\delta e_m{}^a &= i(\psi_m\sigma^a\overline{\zeta}-\zeta\sigma^a\overline{\psi}_m)\\
\delta\psi_m{}^\alpha &= -2\mathscr{D}_m\zeta^\alpha + ie_m{}^c\left\{\frac{1}{3}M(\varepsilon\sigma_c\overline{\zeta})^\alpha + b_c\zeta^\alpha + \frac{1}{3}b^d(\zeta\sigma_d\overline{\sigma}_c)^\alpha\right\}\\
\delta\overline{\psi}_{m\dot\alpha} &= -2\mathscr{D}_m\overline{\zeta}_{\dot\alpha} - ie_m{}^c\left\{\frac{1}{3}M^*(\zeta\sigma_c)_{\dot\alpha} + b_c\overline{\zeta}_{\dot\alpha} + \frac{1}{3}b^d(\overline{\sigma}_c\sigma_d\overline{\zeta})_{\dot\alpha}\right\}\\
\delta M &= -\zeta(\sigma^a\overline{\sigma}^b\psi_{ab} + ib^a\psi_a - i\sigma^a\overline{\psi}_a M)\\
\delta b_{\alpha\alpha} &= \zeta^\delta\left\{\frac{3}{4}\overline{\psi}_\alpha{}^{\dot\gamma}{}_{\delta\dot\gamma\dot\alpha} + \frac{1}{4}\varepsilon_{\delta\alpha}\overline{\psi}^{\gamma\dot\gamma}{}_{\gamma\dot\alpha\dot\gamma} - \frac{i}{2}M^*\psi_{\alpha\dot\alpha\delta}\right.\\
&\qquad\left.+\frac{i}{4}(\overline{\psi}_{\alpha\dot\rho}{}^{\dot\rho}b_{\delta\dot\alpha} + \overline{\psi}_{\delta\dot\rho}{}^{\dot\rho}b_{\alpha\dot\alpha} - \overline{\psi}_\delta{}^{\dot\rho}{}_{\dot\alpha}b_{\alpha\dot\rho})\right\}\\
&\qquad-\overline{\zeta}^{\dot\delta}\left\{\frac{3}{4}\psi^\gamma{}_{\delta\gamma\dot\alpha\alpha} + \frac{1}{4}\varepsilon_{\delta\dot\alpha}\psi_\alpha{}^{\dot\gamma\gamma}{}_{\gamma\gamma} + \frac{i}{2}M\overline{\psi}_{\alpha\dot\alpha\dot\delta}\right.\\
&\qquad\left.-\frac{i}{4}(\psi_{\rho\dot\alpha}{}^\rho b_{\alpha\dot\delta} + \psi_{\rho\dot\delta}{}^\rho b_{\alpha\dot\alpha} - \psi^\rho{}_{\dot\delta\alpha}b_{\rho\dot\alpha})\right\}.
\end{aligned}
\tag{18.23}
$$

文　　献

K. S. Stelle and P. C. West, Phys. Lett. **77B**, 376 (1978).

S. Ferrara, F. Gliozzi, J. Scherk, and P. van Nieuwenhuizen, Nucl. Phys. **B117**, 333 (1976).

重 要 な 式

$$
\begin{aligned}
\xi^\alpha(z) &= \zeta^\alpha(x), \qquad \overline{\xi}_{\dot\alpha}(z) = \overline{\zeta}_{\dot\alpha}(x)\\
\xi^a(z) &= 2i[\theta\sigma^a\overline{\zeta}(x) - \zeta(x)\sigma^a\overline{\theta}]\\
L_{\alpha\beta}(z) &= \frac{1}{3}\{\theta_\alpha[2\zeta_\beta(x)M^*(x) - b_{\beta\dot\gamma}(x)\overline{\zeta}^{\dot\gamma}(x)]\\
&\qquad+\theta_\beta[2\zeta_\alpha(x)M^*(x) - b_{\alpha\dot\gamma}(x)\overline{\zeta}^{\dot\gamma}(x)]\}\\
L_{\dot\alpha\dot\beta}(z) &= \frac{1}{3}\{\overline{\theta}_{\dot\alpha}[2\overline{\zeta}_{\dot\beta}(x)M(x) - \zeta^\gamma(x)b_{\gamma\dot\beta}(x)]
\end{aligned}
\tag{18.11}
$$

---

[2]（訳注）式 (18.23) 中の $\delta\overline{\psi}_{m\dot\alpha}$ の最後の項の符号は，遺稿の書き込みに従った．

$$+\overline{\theta}_{\dot\beta}[2\overline{\zeta}_{\dot\alpha}(x)M(x)-\zeta^{\gamma}(x)b_{\gamma\dot\alpha}(x)]\}$$

$$L_{ab}=\frac{1}{2}(\overline{\sigma}_a\sigma_b\varepsilon)^{\dot\alpha\dot\beta}L_{\dot\alpha\dot\beta}-\frac{1}{2}(\varepsilon\sigma_a\overline{\sigma}_b)^{\alpha\beta}L_{\alpha\beta}$$

$$\begin{aligned}
\delta e_m{}^a &= i(\psi_m\sigma^a\overline{\zeta}-\zeta\sigma^a\overline{\psi}_m)\\
\delta\psi_m{}^\alpha &= -2\mathscr{D}_m\zeta^\alpha+ie_m{}^c\left\{\frac{1}{3}M(\varepsilon\sigma_c\overline{\zeta})^\alpha+b_c\zeta^\alpha+\frac{1}{3}b^d(\zeta\sigma_d\overline{\sigma}_c)^\alpha\right\}\\
\delta\overline{\psi}_{m\dot\alpha} &= -2\mathscr{D}_m\overline{\zeta}_{\dot\alpha}-ie_m{}^c\left\{\frac{1}{3}M^*(\zeta\sigma_c)_{\dot\alpha}+b_c\overline{\zeta}_{\dot\alpha}+\frac{1}{3}b^d(\overline{\sigma}_c\sigma_d\overline{\zeta})_{\dot\alpha}\right\}\\
\delta M &= -\zeta(\sigma^a\overline{\sigma}^b\psi_{ab}+ib^a\psi_a-i\sigma^a\overline{\psi}_aM) \qquad\qquad \textbf{(18.23)}\\
\delta b_{\alpha\dot\alpha} &= \zeta^\delta\left\{\frac{3}{4}\overline{\psi}_\alpha{}^{\dot\gamma}{}_{\delta\dot\gamma\dot\alpha}+\frac{1}{4}\varepsilon_{\delta\alpha}\overline{\psi}^{\gamma\dot\gamma}{}_{\gamma\dot\alpha\dot\gamma}-\frac{i}{2}M^*\psi_{\alpha\dot\alpha\delta}\right.\\
&\quad\left.+\frac{i}{4}(\overline{\psi}_{\alpha\dot\rho}{}^{\dot\rho}b_{\delta\dot\alpha}+\overline{\psi}_{\delta\dot\rho}{}^{\dot\rho}b_{\alpha\dot\alpha}-\overline{\psi}_\delta{}^{\dot\rho}{}_{\dot\alpha}b_{\alpha\dot\rho})\right\}\\
&\quad-\overline{\zeta}^{\dot\delta}\left\{\frac{3}{4}\psi^\gamma{}_{\dot\delta\gamma\dot\alpha\alpha}+\frac{1}{4}\varepsilon_{\dot\delta\dot\alpha}\psi_\alpha{}^{\dot\gamma\gamma}{}_{\dot\gamma\gamma}+\frac{i}{2}M\overline{\psi}_{\alpha\dot\alpha\dot\delta}\right.\\
&\quad\left.-\frac{i}{4}(\psi_{\rho\dot\alpha}{}^\rho b_{\alpha\dot\delta}+\psi_{\rho\dot\delta}{}^\rho b_{\alpha\dot\alpha}-\psi^\rho{}_{\dot\delta\alpha}b_{\rho\dot\alpha})\right\}
\end{aligned}$$

演　　習

(1)　$\xi^\alpha=\overline{\xi}_{\dot\alpha}=L_{AB}=0$, $\xi^a(z)=\xi^a(x)$ に対して，$\delta e_m{}^a$ を計算せよ．結果を通常の相対論の一般座標変換とローレンツ変換と比較せよ．

(2)　$\delta\psi_m{}^\alpha$ の共役をとることにより，$\delta\overline{\psi}_{m\dot\alpha}$ を計算せよ．

(3)　超重力変換 (18.11) は $(\theta,\overline{\theta})$ の高次項により項が増えるが，成分場に対する変換 (18.23) は変わらないことを示せ．

19. 曲がった空間でのカイラル超場とベクトル超場

第 21 章でわれわれは，超重力変換に対して不変なラグランジアンを構築するが，それは平坦な空間では式 (7.24) に帰着する．これを行う前に，曲がった空間でカイラルとベクトルの超場を定義しなければならない．

カイラル超場から出発する．カイラル超場は共変拘束条件

$$\overline{\mathscr{D}}_{\dot\alpha}\Phi = 0 \tag{19.1}$$

を満たす．これは，平坦空間では $\overline{D}_{\dot\alpha}\Phi = 0$ に帰着する．

カイラル超場は 3 個の成分場を含む．それらを θ と $\overline{\theta}$ のべき級数展開の係数関数として定義できる．しかし，この展開は θ，$\overline{\theta}$ がアインシュタイン添字を運ぶので，座標に依存する．それらを，第 6 章演習 (4) に類似して定義することが便利である．

$$\begin{aligned} A &= \Phi|_{\theta=\overline{\theta}=0} \\ \chi_\alpha &= \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathscr{D}_\alpha\Phi|_{\theta=\overline{\theta}=0} \\ F &= -\frac{1}{4}\,\mathscr{D}^\alpha\mathscr{D}_\alpha\Phi|_{\theta=\overline{\theta}=0}. \end{aligned} \tag{19.2}$$

これらの成分はローレンツ添字を運ぶ．それらは，超重力多重項に依存する変換を通じて，θ，$\overline{\theta}$ 展開係数に関係付けられる．成分場の変換則は超場の変換則：

$$\delta\Phi = -\xi^A\mathscr{D}_A\Phi \tag{19.3}$$

から導かれる．パラメーター ξ^A は式 (18.11) に明記されている．Φ はカイラルなので：

$$\delta\Phi = -\xi^a\mathscr{D}_a\Phi - \xi^\alpha\mathscr{D}_\alpha\Phi. \tag{19.4}$$

A の変化はただちに：

$$\delta A = \delta\Phi| = -\xi^\alpha\mathscr{D}_\alpha\Phi| = -\sqrt{2}\,\zeta^\alpha\chi_\alpha. \tag{19.5}$$

χ の変化は，もう少し仕事が必要で：

$$\begin{aligned}\delta\chi_\alpha &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\,\xi^B\mathscr{D}_B\mathscr{D}_\alpha\Phi| \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(\xi^\beta\mathscr{D}_\beta - \overline{\xi}^{\dot\beta}\,\overline{\mathscr{D}}_{\dot\beta})\mathscr{D}_\alpha\Phi|. \end{aligned} \tag{19.6}$$

進むために，われわれは $\mathscr{D}_\beta\mathscr{D}_\alpha\Phi|$ と $\overline{\mathscr{D}}_{\dot\beta}\mathscr{D}_\alpha\Phi|$ を評価しなければならない．式 (16.14) から，

$$(\mathscr{D}_C\mathscr{D}_B - (-)^{bc}\mathscr{D}_B\mathscr{D}_C)V^A = -T_{CB}{}^D\mathscr{D}_DV^A + (-)^{d(b+c)}V^DR_{CBD}{}^A. \tag{19.7}$$

$\mathscr{D}_\beta\mathscr{D}_\alpha\Phi|$ に対して，式 (19.7) と拘束 (14.25) が意味することは，

$$\{\mathscr{D}_\beta,\mathscr{D}_\alpha\}\Phi = 0. \tag{19.8}$$

したがって，

$$\begin{aligned}\mathscr{D}_\beta\mathscr{D}_\alpha\Phi &= \frac{1}{2}\varepsilon_{\beta\alpha}\mathscr{D}^\gamma\mathscr{D}_\gamma\Phi \\ \mathscr{D}_\beta\mathscr{D}_\alpha\Phi| &= -2\varepsilon_{\beta\alpha}F. \end{aligned} \tag{19.9}$$

$\overline{\mathscr{D}}_{\dot\beta}\mathscr{D}_\alpha\Phi|$ に対しては，式 (19 1)，(19.7) と拘束 (14.25) を用いて，

$$\begin{aligned}\overline{\mathscr{D}}_{\dot\beta}\mathscr{D}_\alpha\Phi &= \{\overline{\mathscr{D}}_{\dot\beta},\mathscr{D}_\alpha\}\Phi \\ &= -2i\sigma_{\alpha\dot\beta}{}^d\mathscr{D}_d\Phi. \end{aligned} \tag{19.10}$$

微分 $\mathscr{D}_d\Phi$ は，共変微分の定義 (16.6) を通じて，成分 (19.2) に関係付けられる：

$$\begin{aligned}\mathscr{D}_a\Phi &= E_a{}^m\mathscr{D}_m\Phi + E_a{}^\mu\mathscr{D}_\mu\Phi + E_{a\dot\mu}\overline{\mathscr{D}}^{\dot\mu}\Phi \\ \mathscr{D}_\alpha\Phi &= E_\alpha{}^m\mathscr{D}_m\Phi + E_\alpha{}^\mu\mathscr{D}_\mu\Phi + E_{\alpha\dot\mu}\overline{\mathscr{D}}^{\dot\mu}\Phi \\ \overline{\mathscr{D}}^{\dot\alpha}\Phi &= E^{\dot\alpha m}\mathscr{D}_m\Phi + E^{\dot\alpha\mu}\mathscr{D}_\mu\Phi + E^{\dot\alpha}{}_{\dot\mu}\overline{\mathscr{D}}^{\dot\mu}\Phi. \end{aligned} \tag{19.11}$$

$\theta = \overline{\theta} = 0$ に制限して，

$$\begin{aligned}\mathscr{D}_a\Phi| &= e_a{}^m\left(\mathscr{D}_m\Phi - \frac{1}{2}\psi_m{}^\mu\mathscr{D}_\mu\Phi\right)\Bigg| \\ &= e_a{}^m\left(\partial_mA - \frac{1}{\sqrt{2}}\,\psi_m{}^\mu\chi_\mu\right) \end{aligned} \tag{19.12}$$

$$\mathscr{D}_\alpha \Phi| = \delta_\alpha{}^\mu \mathscr{D}_\mu \Phi| = \sqrt{2}\,\chi_\alpha$$
$$\overline{\mathscr{D}}^{\dot\alpha} \Phi| = \delta^{\dot\alpha}{}_{\dot\mu} \overline{\mathscr{D}}^{\dot\mu} \Phi| = 0$$

を得る．式 (19.11) から，成分場の時空微分 $e_a{}^m \mathscr{D}_m$ には常にグラビティーノ場と物質多重項の高次成分が付随することがわかる．われわれは，これらの項を共変微分 $\hat{D}_a$ に組み入れる．式 (19.12) がわれわれの最初の例を与える．

$$\hat{D}_a A \equiv e_a{}^m \left(\partial_m A - \frac{1}{\sqrt{2}}\, \psi_m{}^\mu \chi_\mu \right). \qquad \textbf{(19.13)}$$

上の結果を組み合わせて，χ の変化を発見する：

$$\delta \chi_\alpha = -\sqrt{2}\,\zeta_\alpha F - i\sqrt{2}\,\sigma_{\alpha\dot\beta}{}^a \overline{\zeta}^{\dot\beta} \hat{D}_a A. \qquad (19.14)$$

あと残っているのは，F の変化だけである．式 (16.9)，すなわち，

$$\delta F = \frac{1}{4} (\xi^\alpha \mathscr{D}_\alpha - \overline{\xi}^{\dot\alpha} \overline{\mathscr{D}}_{\dot\alpha}) \mathscr{D}^\beta \mathscr{D}_\beta \Phi| \qquad (19.15)$$

から始める．演習 (2) で

$$\begin{aligned} \mathscr{D}_\alpha \mathscr{D}^\beta \mathscr{D}_\beta \Phi &= \frac{2}{3} \{\mathscr{D}_\alpha, \mathscr{D}^\gamma\} \mathscr{D}_\gamma \Phi \\ &= -\frac{2}{3} R_\alpha{}^{\gamma\delta}{}_\gamma \mathscr{D}_\delta \Phi \end{aligned} \qquad (19.16)$$

を示す．$R_{\alpha\dot\beta\gamma\delta}$ に式 (15.39) の (1) を代入してわれわれは非常に重要な結果を発見する．

$$\begin{aligned} &\mathscr{D}_\alpha (\mathscr{D}^\gamma \mathscr{D}_\gamma - 8R^+) \Phi = 0 \\ &\overline{\mathscr{D}}_{\dot\alpha} (\overline{\mathscr{D}}_{\dot\gamma} \overline{\mathscr{D}}^{\dot\gamma} - 8R) \Phi^+ = 0. \end{aligned} \qquad (19.17)$$

これは，$(\mathscr{D}^\gamma \mathscr{D}_\gamma - 8R^+)$ と $(\overline{\mathscr{D}}_{\dot\gamma} \overline{\mathscr{D}}^{\dot\gamma} - 8R)$ が，もしそれらがかかっていく超場がローレンツ添字を運んでいなければ，それらはカイラル射影演算子 $D^\gamma D_\gamma$，$\overline{D}_\gamma \overline{D}^\gamma$ の共変的一般化であることを示している．（もし，超場がローレンツ・スピンを運んでいると，式 (19.7) 中の曲率項のために式 (19.17) は変化する．）式 (19.17) の $\theta = \overline{\theta} = 0$ 成分は式 (19.15) の第 1 項：

$$\mathscr{D}_\alpha \mathscr{D}^\beta \mathscr{D}_\beta \Phi| = -\frac{4}{3} \sqrt{2}\, \chi_\alpha M^* \qquad (19.18)$$

を与える．第2項は，演習 (3) で計算される．二つの結果を組み合わせて，

$$\delta F = -\frac{1}{3}\sqrt{2}\,M^*\zeta^\alpha\chi_\alpha + \bar{\zeta}^{\dot{\alpha}}\left(\frac{1}{6}\sqrt{2}\,b_{\alpha\dot{\alpha}}\chi^\alpha - i\sqrt{2}\,\hat{D}_{\alpha\dot{\alpha}}\chi^\alpha\right) \tag{19.19}$$

を得る．超共変微分 $\hat{D}_\alpha\chi_\alpha$ は次のように定義される：

$$\hat{D}_a\chi_\alpha = e_a{}^m\left(\mathscr{D}_m\chi_\alpha - \frac{1}{\sqrt{2}}\,\psi_{m\alpha}F - \frac{i}{\sqrt{2}}\,\bar{\psi}_m{}^{\dot{\beta}}\hat{D}_{\alpha\dot{\beta}}A\right). \tag{19.20}$$

ここで $D_m\chi_\alpha = \partial_m\chi_\alpha - \omega_{m\alpha}{}^\beta\chi_\beta$ である．

式 (19.5)，(19.14)，(19.19) がカイラル多重項の変換則を与える：

$$\begin{aligned}
\delta A &= -\sqrt{2}\,\zeta^\alpha\chi_\alpha \\
\delta\chi_\alpha &= -\sqrt{2}\,\zeta_\alpha F - i\sqrt{2}\,\sigma_{\alpha\dot{\beta}}{}^a\bar{\zeta}^{\dot{\beta}}\hat{D}_a A \\
\delta F &= -\frac{1}{3}\sqrt{2}\,M^*\zeta^\alpha\chi_\alpha \\
&\quad + \bar{\zeta}^{\dot{\alpha}}\left(\frac{1}{6}\sqrt{2}\,b_{\alpha\dot{\alpha}}\chi^\alpha - i\sqrt{2}\,\hat{D}_{\alpha\dot{\alpha}}\chi^\alpha\right).
\end{aligned} \tag{19.21}$$

曲がっている空間のベクトル超場は，通常の拘束

$$V = V^+ \tag{19.22}$$

に従う．カイラル超場の場合のように，それらの成分は共変微分：

$$\begin{gathered}
C = V| \\
\phi_\alpha = -i\mathscr{D}_\alpha V|, \qquad \bar{\phi}_{\dot{\alpha}} = i\bar{\mathscr{D}}_{\dot{\alpha}}V| \\
M = \frac{i}{4}(\mathscr{D}^\alpha\mathscr{D}_\alpha - \bar{\mathscr{D}}_{\dot{\alpha}}\bar{\mathscr{D}}^{\dot{\alpha}})V|, \qquad N = \frac{1}{4}(\mathscr{D}^\alpha\mathscr{D}_\alpha + \bar{\mathscr{D}}_{\dot{\alpha}}\bar{\mathscr{D}}^{\dot{\alpha}})V| \\
v_{\alpha\dot{\alpha}} = -\frac{1}{2}[\mathscr{D}_\alpha, \bar{\mathscr{D}}_{\dot{\alpha}}]V| \\
\lambda_\alpha = iW_\alpha|, \qquad \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}} = -i\bar{W}_{\dot{\alpha}}| \\
D = -\frac{1}{2}\mathscr{D}^\alpha W_\alpha\Big| = -\frac{1}{2}\,\bar{\mathscr{D}}_{\dot{\alpha}}\bar{W}^{\dot{\alpha}}\Big|
\end{gathered} \tag{19.23}$$

を通じて定義される．ここで，われわれは超場 W_α，$\bar{W}_{\dot{\alpha}}$，

$$\begin{aligned}
W_\alpha &= -\frac{1}{4}(\bar{\mathscr{D}}_{\dot{\beta}}\bar{\mathscr{D}}^{\dot{\beta}} - 8R)\mathscr{D}_\alpha V \\
\bar{W}_{\dot{\alpha}} &= -\frac{1}{4}(\mathscr{D}^\beta\mathscr{D}_\beta - 8R^+)\bar{\mathscr{D}}_{\dot{\alpha}}V
\end{aligned} \tag{19.24}$$

を使った．これらの超場はカイラルでゲージ不変である．カイラル性（カイラリティ）：

$$\overline{\mathscr{D}}_{\dot\beta} W_\alpha = 0, \qquad \mathscr{D}_\beta \bar{W}_{\dot\alpha} = 0 \tag{19.25}$$

は演習 (4) で証明される．ゲージ不変性は式 (19.7) と式 (15.38) の (2) から出る：

$$\begin{aligned} \delta V &= \Lambda + \Lambda^+, \qquad \overline{\mathscr{D}}_{\dot\alpha}\Lambda = \mathscr{D}_\alpha \Lambda^+ = 0 \\ \delta W_\alpha &= -\frac{1}{4}(\overline{\mathscr{D}}_{\dot\beta}\overline{\mathscr{D}}^{\dot\beta} - 8R)\mathscr{D}_\alpha \Lambda \\ &= -\frac{1}{4}\overline{\mathscr{D}}_{\dot\beta}\{\overline{\mathscr{D}}^{\dot\beta}, \mathscr{D}_\alpha\}\Lambda + 2R\mathscr{D}_\alpha\Lambda = 0. \end{aligned} \tag{19.26}$$

W_α はゲージ不変なので，その成分を WZ ゲージ：

$$V| = \mathscr{D}_\alpha V| = \overline{\mathscr{D}}_{\dot\alpha} V| = \mathscr{D}_\alpha \mathscr{D}_\beta V| = \overline{\mathscr{D}}_{\dot\alpha}\overline{\mathscr{D}}_{\dot\beta} V| = 0 \tag{19.27}$$

で計算してよい．V の高階微分は演習 (7) で計算される．これらは，次の結果を与える：

$$\begin{aligned} W_\alpha| &= -i\lambda_\alpha \\ \mathscr{D}^\alpha W_\alpha| &= -2D \\ (\mathscr{D}_\alpha W_\beta + \mathscr{D}_\beta W_\alpha)| &= -4i(\sigma^{ba}\varepsilon)_{\alpha\beta}\hat{D}_b v_a \\ \frac{1}{4}\mathscr{D}^\beta \mathscr{D}_\beta W_\alpha| &= -\sigma_{\alpha\dot\beta}{}^c \hat{D}_c \overline{\lambda}^{\dot\beta} + \frac{i}{2}(\lambda_\alpha M^* + b_\alpha{}^\beta \overline{\lambda}_{\dot\beta}). \end{aligned} \tag{19.28}$$

ここで

$$\begin{aligned} \hat{D}_b v_{\alpha\dot\alpha} &= e_b{}^m \left\{ \mathscr{D}_m v_{\alpha\dot\alpha} + i(\psi_{m\alpha}\overline{\lambda}_{\dot\alpha} + \overline{\psi}_{m\dot\alpha}\lambda_\alpha) + \frac{i}{2}\psi_m v \overline{\psi}_a \sigma_{\alpha\dot\alpha}{}^a \right\} \\ \hat{D}_a \overline{\lambda}^{\dot\beta} &= e_a{}^m \left\{ \mathscr{D}_m \overline{\lambda}^{\dot\beta} + \frac{i}{2}\overline{\psi}_m{}^{\dot\beta} D - (\overline{\sigma}^{db})^{\dot\beta}{}_{\dot\kappa}\overline{\psi}_m{}^{\dot\kappa}\hat{D}_d v_b \right\} \end{aligned} \tag{19.29}$$

である．式 (19.28) が W_α のすべての成分を与える．

文　　献

S. Ferrara and P. van Nieuwenhuizen, Phys. Lett. **76B**, 404 (1978).

S. Ferrara, D. Z. Freedman, P. van Nieuwenhuizen, P. Breitenlohner, F. Gliozzi, and J. Scherk, Phys. Rev. **D15**, 1013 (1977).

重要な式

$$\overline{\mathscr{D}}_{\dot\alpha}\Phi = 0 \tag{19.1}$$

$$\begin{aligned} A &= \Phi|_{\theta=\overline{\theta}=0} \\ \chi_\alpha &= \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathscr{D}_\alpha\Phi|_{\theta=\overline{\theta}=0} \\ F &= -\frac{1}{4}\,\mathscr{D}^\alpha\mathscr{D}_\alpha\Phi|_{\theta=\overline{\theta}=0} \end{aligned} \tag{19.2}$$

$$\delta\Phi = -\xi^A\mathscr{D}_A\Phi \tag{19.3}$$

$$\hat{D}_a A \equiv e_a{}^m\left(\partial_m A - \frac{1}{\sqrt{2}}\,\psi_m{}^\mu\chi_\mu\right) \tag{19.13}$$

$$\hat{D}_a\chi_\alpha = e_a{}^m\left(\mathscr{D}_m\chi_\alpha - \frac{1}{\sqrt{2}}\,\psi_{m\alpha}F - \frac{i}{\sqrt{2}}\,\overline{\psi}_m{}^{\dot\beta}\hat{D}_{\alpha\dot\beta}A\right) \tag{19.20}$$

$$\begin{aligned} \delta A &= -\sqrt{2}\,\zeta^\alpha\chi_\alpha \\ \delta\chi_\alpha &= -\sqrt{2}\,\zeta_\alpha F - i\sqrt{2}\,\sigma_{\alpha\dot\beta}{}^a\overline{\zeta}^{\dot\beta}\hat{D}_a A \\ \delta F &= -\frac{1}{3}\sqrt{2}\,M^*\zeta^\alpha\chi_\alpha + \overline{\zeta}^{\dot\alpha}\left(\frac{1}{6}\sqrt{2}\,b_{\alpha\dot\alpha}\chi^\alpha - i\sqrt{2}\,\hat{D}_{\alpha\dot\alpha}\chi^\alpha\right) \end{aligned} \tag{19.21}$$

$$V = V^+ \tag{19.22}$$

$$\begin{gathered} C = V| \\ \phi_\alpha = -i\mathscr{D}_\alpha V|, \qquad \overline{\phi}_{\dot\alpha} = i\overline{\mathscr{D}}_{\dot\alpha}V| \\ M = \frac{i}{4}(\mathscr{D}^\alpha\mathscr{D}_\alpha - \overline{\mathscr{D}}_{\dot\alpha}\overline{\mathscr{D}}^{\dot\alpha})V|, \qquad N = \frac{1}{4}(\mathscr{D}^\alpha\mathscr{D}_\alpha + \overline{\mathscr{D}}_{\dot\alpha}\overline{\mathscr{D}}^{\dot\alpha})V| \\ v_{\alpha\dot\alpha} = -\frac{1}{2}[\mathscr{D}_\alpha, \overline{\mathscr{D}}_{\dot\alpha}]V| \\ \lambda_\alpha = iW_\alpha|, \qquad \overline{\lambda}_{\dot\alpha} = -i\bar{W}_{\dot\alpha}| \\ D = -\frac{1}{2}\mathscr{D}^\alpha W_\alpha\bigg| = -\frac{1}{2}\,\overline{\mathscr{D}}_{\dot\alpha}\bar{W}^{\dot\alpha}\bigg| \end{gathered} \tag{19.23}$$

$$W_\alpha = -\frac{1}{4}(\overline{\mathscr{D}}_{\dot\beta}\overline{\mathscr{D}}^{\dot\beta} - 8R)\mathscr{D}_\alpha V \tag{19.24}$$

$$
\begin{aligned}
W_\alpha| &= -i\lambda_\alpha \\
\mathscr{D}^\alpha W_\alpha| &= -2D \\
(\mathscr{D}_\alpha W_\beta + \mathscr{D}_\beta W_\alpha)| &= -4i(\sigma^{ba}\varepsilon)_{\alpha\beta}\hat{D}_b v_a \\
\frac{1}{4}\mathscr{D}^\beta \mathscr{D}_\beta W_\alpha| &= -\sigma_{\alpha\dot{\beta}}{}^c \hat{D}_c \overline{\lambda}^{\dot{\beta}} + \frac{i}{2}(\lambda_\alpha M^* + b_\alpha{}^{\dot{\beta}}\,\overline{\lambda}_{\dot{\beta}})
\end{aligned}
\tag{19.28}
$$

$$
\begin{aligned}
\hat{D}_b v_{\alpha\dot{\alpha}} &= e_b{}^m \left\{ \mathscr{D}_m v_{\alpha\dot{\alpha}} + i(\psi_{m\alpha}\overline{\lambda}_{\dot{\alpha}} + \overline{\psi}_{m\dot{\alpha}}\lambda_\alpha) + \frac{i}{2}\psi_m v \overline{\psi}_a \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}{}^a \right\} \\
\hat{D}_a \overline{\lambda}^{\dot{\beta}} &= e_a{}^m \left\{ \mathscr{D}_m \overline{\lambda}^{\dot{\beta}} + \frac{i}{2}\,\overline{\psi}_m{}^{\dot{\beta}} D - (\overline{\sigma}^{db})^{\dot{\beta}}{}_{\dot{\kappa}} \overline{\psi}_m{}^{\dot{\kappa}} \hat{D}_d v_b \right\}
\end{aligned}
\tag{19.29}
$$

演　　習

(1)

$$
\sum_{P(\alpha\beta\gamma)} (-)^P \mathscr{D}_\alpha \mathscr{D}_\beta \mathscr{D}_\gamma \Phi = 0
$$

を証明せよ．これを次の形

$$
(\mathscr{D}_\alpha \mathscr{D}_\beta \mathscr{D}_\gamma + \mathscr{D}_\beta \mathscr{D}_\gamma \mathscr{D}_\alpha + \mathscr{D}_\gamma \mathscr{D}_\alpha \mathscr{D}_\beta)\Phi = 0
$$

に書くために式 (19.8) を使え．

$$
\mathscr{D}_\alpha \mathscr{D}_\beta \mathscr{D}_\gamma \Phi = \frac{1}{3}(\{\mathscr{D}_\alpha, \mathscr{D}_\beta\}\mathscr{D}_\gamma - \{\mathscr{D}_\alpha, \mathscr{D}_\gamma\}\mathscr{D}_\beta)\Phi
$$

を示せ．

(2)　式 (19.7) と演習 (1) を使って，式 (19.16) を示せ．

(3)　Φ がカイラルのとき，

$$
\overline{\mathscr{D}}_{\dot{\alpha}} \mathscr{D}_\gamma \mathscr{D}_\alpha \Phi = \{\overline{\mathscr{D}}_{\dot{\alpha}}, \mathscr{D}_\gamma\}\mathscr{D}_\alpha \Phi - \mathscr{D}_\gamma \{\overline{\mathscr{D}}_{\dot{\alpha}}, \mathscr{D}_\alpha\}\Phi
$$

を示せ．式 (19.7)，拘束 (14.25) とビアンキ恒等式の解を使って，

$$
\begin{aligned}
\mathscr{D}_\gamma \{\overline{\mathscr{D}}_{\dot{\alpha}}, \mathscr{D}_\alpha\}\Phi &= -2i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}{}^a \mathscr{D}_\gamma \mathscr{D}_a \Phi \\
&= -2i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}{}^a \mathscr{D}_a \mathscr{D}_\gamma \Phi - 2i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}{}^a [\mathscr{D}_\gamma, \mathscr{D}_a]\Phi \\
&= -2i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}{}^a \mathscr{D}_a \mathscr{D}_\gamma \Phi \\
&\qquad + \frac{1}{2}[\varepsilon_{\alpha\delta} G_{\gamma\dot{\alpha}} - 3\varepsilon_{\gamma\delta} G_{\alpha\dot{\alpha}} - 3\varepsilon_{\gamma\alpha} G_{\delta\dot{\alpha}}]\mathscr{D}^\delta \Phi
\end{aligned}
$$

$$\{\overline{\mathscr{D}}_{\dot{\alpha}}, \mathscr{D}_\gamma\}\mathscr{D}_\alpha\Phi = -2i\sigma_{\gamma\dot{\alpha}}{}^a\mathscr{D}_a\mathscr{D}_\alpha\Phi - [\varepsilon_{\gamma\alpha}G_{\delta\dot{\alpha}} + \varepsilon_{\gamma\delta}G_{\alpha\dot{\alpha}}]\mathscr{D}^\delta\Phi$$

を確認せよ．式 (19.11)，(19.12) を使って，これらの表現の $\theta = \overline{\theta} = 0$ 成分を抜き出せ．これらの結果を式 (19.18) と組み合わせて式 (19.19) を証明せよ．

(4)　式 (19.7) を使って，W_α がカイラルであることを調べよ．

(5)　カイラル多重項に対する変換則が，平坦空間では式 (3.10) に帰着することを示せ．

(6)　式 (17.12) を使って，式 (19.28) 中の $(\mathscr{D}_\alpha W_\beta + \mathscr{D}_\beta W_\alpha)|$ が通常のゲージ変換 $v_a \to v_a + e_a{}^m\partial_m f(x)$ のもとで不変であることを示せ．

(7)　次の関係式を好きな数だけ証明せよ．

(a)　$\overline{\mathscr{D}}_{\dot{\beta}}\mathscr{D}_\alpha V| = -\mathscr{D}_\alpha\overline{\mathscr{D}}_{\dot{\beta}}V| = v_{\alpha\dot{\beta}}$

(b)　$\mathscr{D}_\alpha\mathscr{D}_b V| = \mathscr{D}_b\mathscr{D}_\alpha V| = \dfrac{1}{2}v_{\alpha\dot{\kappa}}\overline{\psi}_b{}^{\dot{\kappa}}$

$\overline{\mathscr{D}}_{\dot{\alpha}}\mathscr{D}_b V| = \mathscr{D}_b\overline{\mathscr{D}}_{\dot{\alpha}}V| = \dfrac{1}{2}\psi_b{}^\kappa v_{\kappa\dot{\alpha}}$

(c)　$\mathscr{D}_a\mathscr{D}_b V| = \mathscr{D}_b\mathscr{D}_a V|$

$$= -\frac{1}{4}v_{\kappa\dot{\kappa}}(\psi_a{}^\kappa\overline{\psi}_b{}^{\dot{\kappa}} + \psi_b{}^\kappa\overline{\psi}_a{}^{\dot{\kappa}})$$

(d)　$\overline{\mathscr{D}}_{\dot{\alpha}}\overline{\mathscr{D}}_{\dot{\beta}}\mathscr{D}_\alpha V| = -2i\varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\lambda_\alpha$

$\mathscr{D}_\alpha\mathscr{D}_\beta\overline{\mathscr{D}}_{\dot{\alpha}}V| = -2i\varepsilon_{\alpha\beta}\overline{\lambda}_{\dot{\alpha}}$

(e)　$\overline{\mathscr{D}}_{\dot{\alpha}}\mathscr{D}_\alpha\overline{\mathscr{D}}_{\dot{\beta}}V| = 2i\varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\lambda_\alpha - i\sigma_{\alpha\dot{\beta}}{}^c\psi_c{}^\delta v_{\delta\dot{\alpha}}$

$\mathscr{D}_\alpha\overline{\mathscr{D}}_{\dot{\alpha}}\mathscr{D}_\beta V| = 2i\varepsilon_{\alpha\beta}\overline{\lambda}_{\dot{\alpha}} - i\sigma_{\beta\dot{\alpha}}{}^c v_{\alpha\dot{\delta}}\overline{\psi}_c{}^{\dot{\delta}}$

(f)　$\mathscr{D}_\alpha\overline{\mathscr{D}}_{\dot{\alpha}}\overline{\mathscr{D}}_{\dot{\beta}}V| = -2i\varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\left(\lambda_\alpha - \dfrac{1}{2}\sigma_{\alpha\dot{\gamma}}{}^c\psi_c{}^\kappa v_\kappa{}^{\dot{\gamma}}\right)$

$\overline{\mathscr{D}}_{\dot{\alpha}}\mathscr{D}_\alpha\mathscr{D}_\beta V| = -2i\varepsilon_{\alpha\beta}\left(\overline{\lambda}_{\dot{\alpha}} - \dfrac{1}{2}\sigma_{\gamma\dot{\alpha}}{}^c v^\gamma{}_{\dot{\kappa}}\overline{\psi}_c{}^{\dot{\kappa}}\right)$

(g)　$\mathscr{D}_\alpha\mathscr{D}_\beta\mathscr{D}_\gamma V| = 0$

$\overline{\mathscr{D}}_{\dot{\alpha}}\overline{\mathscr{D}}_{\dot{\beta}}\overline{\mathscr{D}}_{\dot{\gamma}}V| = 0$

(h)　$\mathscr{D}_a\mathscr{D}_\alpha\mathscr{D}_\beta V| = -i\varepsilon_{\alpha\beta}\overline{\psi}_a{}^{\dot{\alpha}}\left(\overline{\lambda}_{\dot{\alpha}} - \dfrac{1}{2}\sigma_{\gamma\dot{\alpha}}{}^c v^\gamma{}_{\dot{\kappa}}\overline{\psi}_c{}^{\dot{\kappa}}\right)$

$\mathscr{D}_a\overline{\mathscr{D}}_{\dot{\alpha}}\overline{\mathscr{D}}_{\dot{\beta}}V| = i\varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\psi_a{}^\alpha\left(\lambda_\alpha - \dfrac{1}{2}\sigma_{\alpha\dot{\gamma}}{}^c\psi_c{}^\kappa v_\kappa{}^{\dot{\gamma}}\right)$

(i) $$\mathscr{D}_\alpha \mathscr{D}_a \mathscr{D}_\beta V| = -i\varepsilon_{\alpha\beta}\overline{\psi}_a{}^{\dot\alpha}\left(\overline{\lambda}_{\dot\alpha} - \frac{1}{2}\sigma_{\gamma\dot\alpha}{}^c v^\gamma{}_{\dot\kappa}\overline{\psi}_c{}^{\dot\kappa}\right) - \frac{i}{6}\sigma_{\alpha\dot\gamma a} v_\beta{}^{\dot\gamma} M^*$$

$$\overline{\mathscr{D}}_{\dot\alpha} \mathscr{D}_a \overline{\mathscr{D}}_{\dot\beta} V| = i\varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\psi_a{}^\alpha\left(\lambda_\alpha - \frac{1}{2}\sigma_{\alpha\dot\gamma}{}^c \psi_c{}^\kappa v_\kappa{}^{\dot\gamma}\right) - \frac{i}{6}\sigma_{\gamma\dot\alpha a} v^\gamma{}_{\dot\beta} M$$

(j) $$\mathscr{D}_\alpha \mathscr{D}_\beta \mathscr{D}_a V| = -i\varepsilon_{\alpha\beta}\left(\overline{\psi}_a{}^{\dot\alpha}\overline{\lambda}_{\dot\alpha} - \frac{1}{2}\,\overline{\psi}_a{}^{\dot\alpha}\sigma^\gamma{}_{\dot\alpha}{}^c v^\gamma{}_{\dot\kappa}\overline{\psi}_c{}^\kappa + \frac{1}{3} v_a M^*\right)$$

$$\overline{\mathscr{D}}_{\dot\alpha} \overline{\mathscr{D}}_{\dot\beta} \mathscr{D}_a V| = i\varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\left(\psi_a{}^\alpha \lambda_\alpha - \frac{1}{2}\psi_a{}^\alpha \sigma_{\alpha\dot\gamma}{}^c \psi_c{}^\kappa v_\kappa{}^{\dot\gamma} - \frac{1}{3} v_a M\right)$$

(k) $$\mathscr{D}_a \overline{\mathscr{D}}_{\dot\alpha} \mathscr{D}_\alpha V| = \hat{D}_a v_{\alpha\dot\alpha}$$

$$\mathscr{D}_a \mathscr{D}_\alpha \overline{\mathscr{D}}_{\dot\alpha} V| = -\hat{D}_a v_{\alpha\dot\alpha}{}^+$$

(l) $$\overline{\mathscr{D}}_{\dot\alpha} \mathscr{D}_a \mathscr{D}_\alpha V| = \hat{D}_a v_{\alpha\dot\alpha} - \frac{\imath}{24}\,\overline{\sigma}_a{}^{\dot\varepsilon\varepsilon} v_\alpha{}^{\dot\kappa}(\varepsilon_{\dot\varepsilon\dot\kappa} b_{\varepsilon\dot\alpha} - 3\varepsilon_{\dot\alpha\dot\kappa} b_{\varepsilon\dot\varepsilon} - 3\varepsilon_{\dot\alpha\dot\varepsilon} b_{\varepsilon\dot\kappa})$$

$$\mathscr{D}_\alpha \mathscr{D}_a \overline{\mathscr{D}}_{\dot\alpha} V| = -\hat{D}_a v_{\alpha\dot\alpha}{}^+ - \frac{i}{24}\,\overline{\sigma}_a{}^{\dot\varepsilon\varepsilon} v^\kappa{}_{\dot\alpha}(\varepsilon_{\varepsilon\kappa} b_{\alpha\dot\varepsilon} - 3\varepsilon_{\alpha\kappa} b_{\varepsilon\dot\varepsilon} - 3\varepsilon_{\alpha\varepsilon} b_{\kappa\dot\varepsilon})$$

(m) $$\overline{\mathscr{D}}_{\dot\alpha} \mathscr{D}_\alpha \mathscr{D}_a V| = \hat{D}_a v_{\alpha\dot\alpha} + \frac{i}{6}\,\overline{\sigma}_a{}^{\dot\varepsilon\varepsilon}(v_{\varepsilon\dot\alpha} b_{\alpha\dot\varepsilon} - v_{\alpha\dot\varepsilon} b_{\varepsilon\dot\alpha})$$

$$\mathscr{D}_\alpha \overline{\mathscr{D}}_\alpha \mathscr{D}_a V| = -\hat{D}_a v_{\alpha\dot\alpha}{}^+ + \frac{i}{6}\,\overline{\sigma}_a{}^{\dot\varepsilon\varepsilon}(v_{\alpha\dot\varepsilon} b_{\varepsilon\dot\alpha} - v_{\varepsilon\dot\alpha} b_{\alpha\dot\varepsilon}).$$

20. 新しいΘ変数とカイラル密度

前章でわれわれはカイラル超場の共変成分 (19.2) を定義した．本章では，新しい Θ 変数を導入する．これらの変数は，カイラル超場の展開係数が正確に共変成分 (19.2)：

$$\Phi = A(x) + \sqrt{2}\,\Theta^\alpha \chi_\alpha(x) + \Theta^\alpha \Theta_\alpha F(x) \tag{20.1}$$

であるように定義される．この表示では，Θ 変数はアインシュタイン添字ではなく局所ローレンツの添字を運ぶ．

カイラル多重項の変換則は，式 (19.21) で与えられる．われわれの目的は，この変換則を次の形で再現することである．

$$\delta\Phi = -\eta^M(x,\Theta)\partial_M \Phi. \tag{20.2}$$

微分演算子 ∂_M は，時空座標 x^m と新しい変数 Θ^α に作用する．新しい変換のパラメーター

$$\eta^M(x,\Theta) = \eta^M{}_{(0)}(x) + \Theta^\alpha \eta^M{}_{(1)\alpha}(x) + \Theta^\alpha\Theta_\alpha \eta^M{}_{(2)}(x) \tag{20.3}$$

は，古いパラメーター $\zeta(x)$，$\bar{\zeta}(x)$ で関係付けられなければならない．仮定 (20.2) は，式 (19.21) が実際に式 (20.2) の形に書けることを示すことによって正当化される．式 (20.2) は線形微分演算子を含んでいるので，カイラル超場の積は，依然カイラル超場として変換する．

さて，パラメーター η を計算しよう．式 (20.1) と式 (20.2) とから，

$$\delta A = -\eta^m{}_{(0)}\partial_m A - \sqrt{2}\,\eta^\alpha{}_{(0)}\chi_\alpha \tag{20.4}$$

がわかる．これと式 (19.21)

$$\delta A = -\sqrt{2}\,\zeta^\alpha \chi_\alpha \tag{20.5}$$

と比較して

$$\begin{aligned} \eta^m{}_{(0)} &= 0 \\ \eta^\alpha{}_{(0)} &= \zeta^\alpha \end{aligned} \tag{20.6}$$

を得る．次に $\delta\chi$ を考える．式 (20.1) と式 (20.2) から，

$$\begin{aligned} \sqrt{2}\,\delta\chi_\alpha = &-\eta^m{}_{(1)\alpha}\partial_m A - \sqrt{2}\,\eta^\beta{}_{(1)\alpha}\chi_\beta \\ &- \sqrt{2}\,\eta^m{}_{(0)}\partial_m\chi_\alpha - 2\eta_{(0)\alpha}F \end{aligned} \tag{20.7}$$

を得る．これと式 (19.21)

$$\delta\chi_\alpha = -\sqrt{2}\,\zeta_\alpha F - i\sqrt{2}\,\sigma_{\alpha\dot\beta}{}^a\overline{\zeta}^{\dot\beta} e_a{}^m\left(\partial_m A - \frac{1}{\sqrt{2}}\,\psi_m{}^\beta\chi_\beta\right) \tag{20.8}$$

を比較し，そして式 (20.6) から $\eta^m{}_{(0)}$ と $\eta^\alpha{}_{(0)}$ を使って

$$\begin{aligned} \eta^m{}_{(1)\alpha} &= 2i\sigma_{\alpha\dot\beta}{}^a\overline{\zeta}^{\dot\beta} e_a{}^m \\ \eta^\beta{}_{(1)\alpha} &= -i\sigma_{\alpha\dot\beta}{}^a\overline{\zeta}^{\dot\beta} e_a{}^m\psi_m{}^\beta \end{aligned} \tag{20.9}$$

を結論する．δF の計算は演習として残す．結局，われわれは式 (19.21) が式 (20.2) の形で書けることがわかるが，そのときのパラメーター η は，

$$\begin{aligned} \eta^m &= 2i\Theta\sigma^m\overline{\zeta} + \Theta\Theta\overline{\psi}_n\overline{\sigma}^m\sigma^n\overline{\zeta} \\ \eta^\alpha &= \zeta^\alpha - i\Theta\sigma^m\overline{\zeta}\psi_m{}^\alpha \\ &\quad +\Theta\Theta\left\{\frac{1}{3}M^*\zeta^\alpha + \frac{1}{6}b_a(\varepsilon\sigma^a\overline{\zeta})^\alpha - i\omega_m{}^{\alpha\beta}(\sigma^m\overline{\zeta})_\beta\right. \\ &\quad \left. -\frac{1}{2}\psi_n{}^\alpha(\overline{\psi}_m\overline{\sigma}^n\sigma^m\overline{\zeta})\right\} \end{aligned} \tag{20.10}$$

で与えられる．

変数 Θ は，不変な作用を構築することに用いる．その議論の前に，カイラル密度の概念を導入する．カイラル密度は，超空間の関数で次の変換則をもつ．

$$\begin{aligned} \delta\Delta &= -\partial_M[\eta^M\Delta(-)^m] \\ &= -\eta^M\partial_M\Delta - (-)^m(\partial_M\eta^M)\Delta. \end{aligned} \tag{20.11}$$

この法則は，カイラル密度とカイラル超場の積が再びカイラル密度：

$$\begin{aligned}\delta\Delta\Phi &= -\partial_M[\eta^M\Delta(-)^m]\Phi - \Delta\eta^M\partial_M\Phi \\ &= -\partial_M[\eta^M\Delta\Phi(-)^m]\end{aligned} \tag{20.12}$$

となるように選択される．この事実が，カイラル超場から不変な作用を構築することを可能にする：

$$\begin{aligned}\delta\mathscr{L} &= \delta\int d^4x\,d^2\Theta\,\Delta g(\Phi) \\ &= -\int d^4x\,d^2\Theta\,\partial_M[\eta^M\Delta g(\Phi)(-)^m] = 0.\end{aligned} \tag{20.13}$$

ここで，g は Φ のカイラルな関数である．

カイラル密度は，成分場で分解される：

$$\Delta = a + \sqrt{2}\,\Theta\rho + \Theta\Theta f. \tag{20.14}$$

成分場の変換則は式 (20.10) と式 (20.11) から求められて：

$$\begin{aligned}\delta a &= -\sqrt{2}\,\zeta\rho + ia\psi\sigma\bar{\zeta} \\ \delta\rho_\alpha &= -\sqrt{2}\,\zeta_\alpha f - i\sqrt{2}\,\mathscr{D}_m(\sigma^m\bar{\zeta}a)_\alpha + i\psi\sigma\bar{\zeta}\rho_\alpha \\ &\quad + i(\sigma^m\bar{\zeta})_\alpha\psi_m\rho - \frac{1}{3}\sqrt{2}\,\zeta_\alpha M^* a \\ &\quad - \frac{1}{6}\sqrt{2}\,a(\sigma^a\bar{\zeta})_\alpha b_a + \frac{1}{2}\sqrt{2}\,\psi_{n\alpha}\bar{\psi}_m\bar{\sigma}^n\sigma^m\bar{\zeta}a \\ \delta f &= \partial_m[-a\bar{\psi}_n\bar{\sigma}^m\sigma^n\bar{\zeta} + i\sqrt{2}\,\rho\sigma^m\bar{\zeta}].\end{aligned} \tag{20.15}$$

δf の表現は，再び $\int d^4x f$ が不変であることを示している．

多脚場に関係付けられる特別なカイラル密度 $\mathscr{E}$ が存在する．われわれは，この密度をその最低次：

$$a = \frac{1}{2}e = \frac{1}{2}\det e_m{}^a \tag{20.16}$$

から構成しよう．$e_m{}^a$ の変換則は式 (18.23) で与えられる．これから次式を得る．

$$\begin{aligned}\delta e &= e e_a{}^m \delta e_m{}^a \\ &= iee_a{}^m(\psi_m\sigma^a\bar{\zeta} - \zeta\sigma^a\bar{\psi}_m).\end{aligned} \tag{20.17}$$

式 (20.17) を式 (20.15) と比較して,

$$\rho = \frac{i}{4}\sqrt{2}\, e\sigma^m \overline{\psi}_m. \qquad \textbf{(20.18)}$$

残りの成分を見つけるために，ζ に比例する $\delta\rho$ の中の項を計算する．

$$\begin{aligned}\delta\rho_\alpha &= \frac{i}{4}\sqrt{2}\,\sigma_{\alpha\dot\alpha}{}^a \delta(ee_a{}^m \overline{\psi}_m{}^{\dot\alpha}) \\ &= -\sqrt{2}\,\zeta_\alpha f - \frac{1}{6}\sqrt{2}\, eM^*\zeta_\alpha + (\overline{\zeta}\ \text{の項}).\end{aligned} \qquad (20.19)$$

式 (18.23) から，

$$\begin{aligned}\delta\rho_\alpha = \frac{i}{4}\sqrt{2}\,\sigma_{\alpha\dot\alpha}{}^a e\Big\{&-i(\zeta\sigma^b\overline{\psi}_n)(e_b{}^n e_a{}^m - e_a{}^n e_b{}^m)\overline{\psi}_m{}^{\dot\alpha} \\ &+ \frac{i}{3}M^*(\zeta\sigma_a\varepsilon)^{\dot\alpha}\Big\} + (\overline{\zeta}\ \text{の項})\end{aligned} \qquad (20.20)$$

を得る．この二つの結果を比較して，

$$f = -\frac{1}{2}eM^* - \frac{1}{8}e\overline{\psi}_m(\overline{\sigma}^m\sigma^n - \overline{\sigma}^n\sigma^m)\overline{\psi}_n. \qquad \textbf{(20.21)}$$

式 (20.16)，(20.18)，(20.21) が超重力多重項の全（full）変換則 (18.25) のもとで，カイラル密度として変換することを示すには，冗長な計算が必要である．

次章で，われわれは超対称模型を超重力に結合させる．カイラル超場 R が超重力多重項のラグランジアンであることがわかる．第 17 章で，R の成分を計算する方法を発見した，ここでは，カイラル多重項と重力多重項の変換則を用いて同じ結果を導く．われわれは最低次の成分から出発する．

$$R| = -\frac{1}{6}M. \qquad \textbf{(20.22)}$$

式 (4.11) との類似から全超場をつくる．式 (18.25) から

$$\delta R| = \frac{1}{6}\zeta(\sigma^a\overline{\sigma}^b\psi_{ab} + ib^a\psi_a - i\sigma^a\overline{\psi}_a M) \qquad (20.23)$$

がわかる．式 (19.5) から

$$\delta R| = -\zeta^\alpha \mathscr{D}_\alpha R|. \qquad (20.24)$$

したがって，

$$\mathscr{D}_\alpha R| = -\frac{1}{6}(\sigma^a\overline{\sigma}^b\psi_{ab} + ib^a\psi_a - i\sigma^a\overline{\psi}_a M)_\alpha. \qquad \textbf{(20.25)}$$

これは，第 7 章演習 (8) と一致する．同様な方法で，

$$\begin{aligned}\mathscr{D}\mathscr{D}R| = &-\frac{1}{3}e_a{}^m e_b{}^n \mathscr{R}_{mn}{}^{ab} + \frac{2}{3}i\overline{\psi}^m\overline{\sigma}^n\psi_{mn}\\ &+\frac{1}{12}\varepsilon^{k\ell mn}[\overline{\psi}_k\overline{\sigma}_\ell\psi_{mn} + \psi_k\sigma_\ell\overline{\psi}_{mn}]\\ &-\frac{2}{3}ie_a{}^m\mathscr{D}_m b^a + \frac{4}{9}MM^* + \frac{2}{9}b^a b_a\\ &+\frac{1}{3}\overline{\psi}\,\overline{\psi}M - \frac{1}{3}\psi_m\sigma^m\overline{\psi}_n b^n\end{aligned} \qquad \textbf{(20.26)}$$

を得る．

文　　献

V. Ogievetsky and E. Sokatchev, Phys. Lett. **79B**, 222 (1978).
J. Wess and B. Zumino, Phys. Lett. **74B**, 51 (1978).

重 要 な 式

$$\Phi = A(x) + \sqrt{2}\,\Theta^\alpha\chi_\alpha(x) + \Theta^\alpha\Theta_\alpha F(x) \qquad \textbf{(20.1)}$$

$$\delta\Phi = -\eta^M(x,\Theta)\partial_M\Phi \qquad \textbf{(20.2)}$$

$$\begin{aligned}\eta^m &= 2i\Theta\sigma^m\overline{\zeta} + \Theta\Theta\overline{\psi}_n\overline{\sigma}^m\sigma^n\overline{\zeta}\\ \eta^\alpha &= \zeta^\alpha - i\Theta\sigma^m\overline{\zeta}\psi_m{}^\alpha\\ &\quad+\Theta\Theta\left\{\frac{1}{3}M^*\zeta^\alpha + \frac{1}{6}b_a(\varepsilon\sigma^a\overline{\zeta})^\alpha - i\omega_m{}^{\alpha\beta}(\sigma^m\overline{\zeta})_\beta\right.\\ &\quad\left.-\frac{1}{2}\psi_n{}^\alpha(\overline{\psi}_m\overline{\sigma}^n\sigma^m\overline{\zeta})\right\}\end{aligned} \qquad \textbf{(20.10)}$$

$$\begin{aligned}\delta\Delta &= -\partial_M[\eta^M\Delta(-)^m]\\ &= -\eta^M\partial_M\Delta - (-)^m(\partial_M\eta^M)\Delta\end{aligned} \qquad \textbf{(20.11)}$$

$$\Delta = a + \sqrt{2}\,\Theta\rho + \Theta\Theta f \tag{20.14}$$

$$\begin{aligned}
\delta a &= -\sqrt{2}\,\zeta\rho + ia\psi\sigma\overline{\zeta} \\
\delta\rho_\alpha &= -\sqrt{2}\,\zeta_\alpha f - i\sqrt{2}\,\mathscr{D}_m(\sigma^m\overline{\zeta}a)_\alpha + i\psi\sigma\overline{\zeta}\rho_\alpha \\
&\quad + i(\sigma^m\overline{\zeta})_\alpha\psi_m\rho - \frac{1}{3}\sqrt{2}\,\zeta_\alpha M^* a \\
&\quad - \frac{1}{6}\sqrt{2}\,a(\sigma^a\overline{\zeta})_\alpha b_a + \frac{1}{2}\sqrt{2}\,\psi_{n\alpha}\overline{\psi}_m\overline{\sigma}^n\sigma^m\overline{\zeta}a \\
\delta f &= \partial_m[-a\overline{\psi}_n\overline{\sigma}^m\sigma^n\overline{\zeta} + i\sqrt{2}\,\rho\sigma^m\overline{\zeta}]
\end{aligned} \tag{20.15}$$

$$a = \frac{1}{2}e = \frac{1}{2}\det e_m{}^a \tag{20.16}$$

$$\rho = \frac{i}{4}\sqrt{2}\,e\sigma^m\overline{\psi}_m \tag{20.18}$$

$$f = -\frac{1}{2}eM^* - \frac{1}{8}e\overline{\psi}_m(\overline{\sigma}^m\sigma^n - \overline{\sigma}^n\sigma^m)\overline{\psi}_n \tag{20.21}$$

$$R| = -\frac{1}{6}M \tag{20.22}$$

$$\mathscr{D}_\alpha R| = -\frac{1}{6}(\sigma^a\overline{\sigma}^b\psi_{ab} + ib^a\psi_a - i\sigma^a\overline{\psi}_a M)_\alpha \tag{20.25}$$

$$\begin{aligned}
\mathscr{D}\mathscr{D}R| &= -\frac{1}{3}e_a{}^m e_b{}^n\mathscr{R}_{mn}{}^{ab} + \frac{2}{3}i\overline{\psi}^m\overline{\sigma}^n\psi_{mn} \\
&\quad + \frac{1}{12}\varepsilon^{k\ell mn}[\overline{\psi}_k\overline{\sigma}_\ell\psi_{mn} + \psi_k\sigma_\ell\overline{\psi}_{mn}] \\
&\quad - \frac{2}{3}ie_a{}^m\mathscr{D}_m b^a + \frac{4}{9}MM^* + \frac{2}{9}b^a b_a \\
&\quad + \frac{1}{3}\overline{\psi}\,\overline{\psi}M - \frac{1}{3}\,\psi_m\sigma^m\overline{\psi}_n b^n
\end{aligned} \tag{20.26}$$

演　　習

(1)　式 (20.2), (20.10) を用いて δF を計算せよ．その結果を式 (19.20) と比較せよ．

(2)　式 (20.19), (20.20) から式 (20.21) を導け．($\overline{\psi}\,\overline{\psi}$ 項を簡単化するのに式 (A.17) を用いてよい．)

(3)
$$\mathscr{D}^\alpha \mathscr{D}_\alpha R - \overline{\mathscr{D}}_{\dot\alpha}\overline{\mathscr{D}}^{\dot\alpha} R^+ = \{\mathscr{D}^\alpha, \overline{\mathscr{D}}^{\dot\beta}\} G_{\alpha\dot\beta} = 4i\mathscr{D}_a G^a$$

を示せ．

(4)　ビアンキ恒等式を用いて

$$\begin{aligned} e_a{}^m e_b{}^n R_{mn}{}^{ab}| = &-\frac{3}{2}(\mathscr{D}^\alpha \mathscr{D}_\alpha R + \overline{\mathscr{D}}_{\dot\alpha}\overline{\mathscr{D}}^{\dot\alpha} R^+)| + 48RR^+| \\ &+ i[(\overline{\psi}_m\overline{\sigma}^m)^\alpha \mathscr{D}_\alpha R + (\psi_m\sigma^m)_{\dot\alpha}\overline{\mathscr{D}}^{\dot\alpha} R^+]| \\ &- 2[\overline{\psi}_m\overline{\sigma}^{mn}\overline{\psi}_n R + \psi_m\sigma^{mn}\psi_n R^+]| \\ &+ 6G_aG^a| + 2i(\psi_a{}^\alpha \mathscr{D}_\alpha - \overline{\psi}_{a\dot\alpha}\overline{\mathscr{D}}^{\dot\alpha})G^a| \\ &+ \frac{1}{2}[(\overline{\psi}_m\overline{\sigma}^m)^\alpha(\overline{\sigma}^n\psi_n)^{\dot\alpha} - (\overline{\psi}_n\overline{\sigma}^m)^\alpha(\overline{\sigma}^n\psi_m)^{\dot\alpha}]G_{\alpha\dot\alpha}| \end{aligned}$$

を証明せよ．

(5)　演習 (3)，(4) の結果を用いて，式 (20.26) を再現せよ．（注意：計算は退屈！）

21. 極小カイラル超重力模型

われわれは，超重力物質結合を構築するために必要なものをもっている．一般的な場合はかなり面倒なので，ここではより簡単な例から出発する．われわれは，

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L} = &\int d^2\theta\, d^2\overline{\theta}\, \Phi_i{}^{+}\Phi_i \\
&+ \left[\int d^2\theta \left(a_i\Phi_i + \frac{1}{2}m_{ij}\Phi_i\Phi_j + \frac{1}{3}g_{ijk}\Phi_i\Phi_j\Phi_k\right) + \text{h.c.}\right] \qquad (21.1)
\end{aligned}
$$

で与えられるラグランジアンから出発する．このラグランジアンは第 5 章ではじめて導入された．それは，カイラル超場のみを含む最も一般的なくり込み可能なラグランジアンである．以下では，式 (21.1) を曲がった空間へ拡張する．この模型を解析するために導入した技術は，以後の章で一般的な場合を議論するのに役に立つであろう．われわれが導く結果は平坦空間の極限で式 (21.1) に帰着するので，われわれはそれを極小カイラル超重力模型とよぶ．

われわれは，超重力多重項に対する不変な作用を書き下すことにより，構築を始める．

$$
\mathscr{L}_{S.G.} = -\frac{6}{\kappa^2}\int d^2\Theta\, \mathscr{E} R + \text{h.c.} \qquad \mathbf{(21.2)}
$$

ここで，$\kappa^2 = 8\pi G_N$ は重力結合であり，われわれは 1 とおく．カイラル密度 $\mathscr{E}$ と超空間曲率 R は第 20 章で計算された．それらの Θ 展開は後に本章で列記される．これらの表現を式 (21.2) に代入すると $\mathscr{L}_{S.G.}$ が超重力多重項により与えられる：

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}_{S.G} =& -\frac{1}{2}e\mathscr{R} - \frac{1}{3}eM^*M + \frac{1}{3}eb^a b_a \\
&+ \frac{1}{2}e\varepsilon^{k\ell mn}(\overline{\psi}_k\overline{\sigma}_\ell\tilde{\mathscr{D}}_m\psi_n - \psi_k\sigma_\ell\tilde{\mathscr{D}}_m\overline{\psi}_n). \qquad \mathbf{(21.3)}
\end{aligned}
$$

曲率 $\mathscr{R}$ は，式 (17.15) で導入された．

$$
\mathscr{R} = e_a{}^n e_b{}^m(\partial_n\omega_m{}^{ab} - \partial_m\omega_n{}^{ab} + \omega_m{}^{ac}\omega_{nc}{}^b - \omega_n{}^{ac}\omega_{mc}{}^b). \qquad (21.4)
$$

一方，共変微分 $\tilde{D}_m\psi_n$ は式 (17.8) で導入された．式 (21.3) から，$\mathscr{L}_{S.G.}$ が重力場に対するアインシュタイン作用を含むことがわかる．それはまた，スピン–3/2 のグラビティーノに対するラリタ–シュウィンガー（Rarita–Schwinger）作用も含む．場 M と b_a は伝播せず，超重力多重項中の補助場である．それらが反対符号で式 (21.3) に入ることに留意せよ．

ラグランジアン (21.1) は，容易に曲がった空間に拡大される．まず，第 9 章演習 (6) で概説したように，それをカイラル形に書く．

$$\mathscr{L} = \int d^2\theta \bigg[-\frac{1}{8}\,\overline{D}\,\overline{D}\Phi_i{}^+\Phi_i + a_i\Phi_i + \frac{1}{2}m_{ij}\Phi_i\Phi_j + \frac{1}{3}g_{ijk}\Phi_i\Phi_j\Phi_k \bigg] + \text{h.c.} \tag{21.5}$$

それから，超重力作用 (21.2) を加えて，$\theta \to \Theta$，$d^2\theta \to d^2\Theta 2\mathscr{E}$，$-(1/4)\overline{D}\,\overline{D} \to -(1/4)(\overline{\mathscr{D}}\,\overline{\mathscr{D}} - 8R)$ とおき換える．これが，曲がった空間での作用 (21.1) を与える：

$$\mathscr{L} = \int d^2\Theta\, 2\mathscr{E} \bigg[-3R - \frac{1}{8}(\overline{\mathscr{D}}\,\overline{\mathscr{D}} - 8R)\Phi_i{}^+\Phi_i - \frac{1}{8}(\overline{\mathscr{D}}\,\overline{\mathscr{D}} - 8R)[c_i\Phi_i + \bar{c}_i\Phi_i{}^+] + d + a_i\Phi_i + \frac{1}{2}m_{ij}\Phi_i\Phi_j + \frac{1}{3}g_{ijk}\Phi_i\Phi_j\Phi_k \bigg] + \text{h.c.} \tag{21.6}$$

このラグランジアンが極小カイラル模型を記述する．それは，平坦空間で式 (21.1) に帰着する．c，d 項が含まれるが，それらは超場 Φ_i のシフトから発生するからである．それらは平坦空間では消える．Φ_i が中性でないかぎり，ゲージ不変性により $c_i = 0$ に制限されることに留意せよ．式 (21.6) は，二つの型の項を含む．カイラル射影演算子 $(\overline{\mathscr{D}}\,\overline{\mathscr{D}} - 8R)$ を含む項と含まない項である．射影演算子を含む項は，カイラル運動エネルギーを曲がった空間へ一般化したものである．含まない項は，超空間ポテンシャルを曲がった空間へ拡張したものである．

この区別を強調するために式 (21.6) を次の形に書く．

$$\mathscr{L} = \int d^2\Theta\, 2\mathscr{E} \bigg[-\frac{1}{8}(\overline{\mathscr{D}}\,\overline{\mathscr{D}} - 8R)\Omega(\Phi, \Phi^+) + P(\Phi) \bigg] + \text{h.c.} \tag{21.7}$$

ここで，$\Omega(\Phi, \Phi^+) = \Phi_i{}^+\Phi_i + c_i\Phi_i + \bar{c}_i{}^+\Phi_i{}^+ - 3$ は超空間運動エネルギー，そして $P(\Phi) = d + a_i\Phi_i + (1/2)m_{ij}\Phi_i\Phi_j + (1/3)g_{ijk}\Phi_i\Phi_j\Phi_k$ は超空間ポテンシャルで

ある．第 23 章で，われわれは，Ω と P がそれぞれの超場の任意関数である一般の場合に，この区別が保たれることをみる．

ラグランジアン (21.7) の成分場による展開は長くなる．それをみるには，$\Phi_i\mathscr{E}$, R の Θ 展開：

$$\begin{aligned}
\Phi_i &= A_i + \sqrt{2}\,\Theta\chi_i + \Theta\Theta F_i \\
2\mathscr{E} &= e\{1 + i\Theta\sigma^a\overline{\psi}_a - \Theta\Theta[M^* + \overline{\psi}_a\overline{\sigma}^{ab}\overline{\psi}_b]\} \\
R &= -\frac{1}{6}\Big\{M + \Theta[\sigma^a\overline{\sigma}^b\psi_{ab} - i\sigma^a\overline{\psi}_a M + i\psi_a b^a] \\
&\quad + \Theta\Theta\Big[-\frac{1}{2}\mathscr{R} + i\overline{\psi}^a\overline{\sigma}^b\psi_{ab} + \frac{2}{3}MM^* \\
&\quad + \frac{1}{3}b^a b_a - ie_a{}^m\mathscr{D}_m b^a + \frac{1}{2}\,\overline{\psi}\,\overline{\psi}M - \frac{1}{2}\psi_a\sigma^a\overline{\psi}_c b^c \\
&\quad + \frac{1}{8}\varepsilon^{abcd}[\overline{\psi}_a\overline{\sigma}_b\psi_{cd} + \psi_a\sigma_b\overline{\psi}_{cd}]\Big]\Big\} \qquad \textbf{(21.8)}
\end{aligned}$$

が必要である．$\Xi_i = (\overline{\mathscr{D}}\,\overline{\mathscr{D}} - 8R)\Phi_i{}^+$ の成分は，式 (19.7) の助けを借りて計算できて，

$$\begin{aligned}
\Xi_i &= (\overline{\mathscr{D}}_{\dot\alpha}\overline{\mathscr{D}}^{\dot\alpha} - 8R)\Phi_i{}^+ \\
&= (\overline{\mathscr{D}}_{\dot\alpha}\overline{\mathscr{D}}^{\dot\alpha} - 8R)\Phi_i{}^+| + \Theta^\alpha\mathscr{D}_\alpha(\overline{\mathscr{D}}_{\dot\alpha}\overline{\mathscr{D}}^{\dot\alpha} - 8R)\Phi_i{}^+| \\
&\quad - \frac{1}{4}\Theta\Theta\mathscr{D}^\alpha\mathscr{D}_\alpha(\overline{\mathscr{D}}_{\dot\alpha}\overline{\mathscr{D}}^{\dot\alpha} - 8R)\Phi_i{}^+|. \qquad (21.9)
\end{aligned}$$

必要な要素は演習 (1) で与えられる．その結果，

$$\begin{aligned}
\Xi_i &= -4F_i^* + \frac{4}{3}MA_i^* + \Theta\Big\{-4i\sqrt{2}\,\sigma^c\hat{D}_c\overline{\chi}_i - \frac{2}{3}\sqrt{2}\,\sigma^a b_a\overline{\chi}_i \\
&\quad + \frac{4}{3}A_i^*(2\sigma^{ab}\psi_{ab} - i\sigma^a\overline{\psi}_a M + i\psi_a b^a)\Big\} \\
&\quad + \Theta\Theta\Big\{-4e_a{}^m\mathscr{D}_m\hat{D}^a A_i^* - \frac{8}{3}ib_a\hat{D}^a A_i^* \\
&\quad - \frac{2}{3}\sqrt{2}\,\overline{\psi}_{ab}\overline{\sigma}^{ab}\overline{\chi}_i + 2\sqrt{2}\,\overline{\psi}_a\hat{D}^a\overline{\chi}_i - \frac{8}{3}M^*F_i^* \\
&\quad - \frac{2}{3}i\sqrt{2}\,\overline{\psi}_a\overline{\chi}_i b^a + \frac{1}{3}i\sqrt{2}\,\overline{\psi}_a\overline{\sigma}^a\sigma^c\overline{\chi}_i b_c \\
&\quad + \frac{4}{3}A_i^*\Big[-\frac{1}{2}\mathscr{R} + i\overline{\psi}^a\overline{\sigma}^b\psi_{ab} - ie_a{}^m\mathscr{D}_m b^a
\end{aligned}$$

$$+\frac{2}{3}M^*M+\frac{1}{3}b_ab^a+\frac{1}{2}\overline{\psi}\,\overline{\psi}M-\frac{1}{2}\psi_a\sigma^a\overline{\psi}_cb^c$$
$$+\frac{1}{8}\varepsilon^{abcd}(\overline{\psi}_a\overline{\sigma}_b\psi_{cd}+\psi_a\sigma_b\overline{\psi}_{cd})\Big]\Big\} \qquad \textbf{(21.10)}$$

を得る．ここで，次の超対称共変微分を使った．

$$\begin{aligned}\hat{D}_aA_i^* &= e_a{}^m\partial_mA_i^*-\frac{1}{2}\sqrt{2}\,\overline{\psi}_{a\dot{\kappa}}\overline{\chi}_i^{\dot{\kappa}}\\ \hat{D}_a\overline{\chi}_{i\dot{\alpha}} &= e_a{}^m\mathscr{D}_m\overline{\chi}_{i\dot{\alpha}}+\frac{i}{2}\sqrt{2}\,\psi_a{}^\beta\sigma_{\beta\dot{\alpha}}{}^b\hat{D}_bA_i^*-\frac{1}{2}\sqrt{2}\,\overline{\psi}_{a\dot{\alpha}}F_i^*.\end{aligned} \qquad \textbf{(21.11)}$$

ここで，$\mathscr{D}_m\overline{\chi}_{i\dot{\alpha}}=\partial_m\overline{\chi}_{i\dot{\alpha}}+\overline{\chi}_{i\dot{\beta}}\omega_m{}^{\dot{\beta}}{}_{\dot{\alpha}}$ である．超場 $\mathscr{E}$，R，Φ_i，Ξ_i が，カイラル場だけを含むどのような超重力ラグランジアンでも計算できることを可能にする．

ラグランジアン (21.7) の展開は，補助場 M，b_a，F_i を含む項と，同様に，物理的な場，A_i，χ_i，$e_m{}^a$，$\psi_m{}^\alpha$ の運動項を含む．ラグランジアンはまた，くり込み不可能な 4 体フェルミ結合のような高次の相互作用項を含み，それはニュートン定数のべきで抑制される．展示を容易にするために，ラグランジアン全体を次のように書く．

$$\mathscr{L}=\mathscr{L}_{kin}+\mathscr{L}_{aux}+\mathscr{L}_{quartic}. \qquad (21.12)$$

ここで

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{kin}=&\ \frac{1}{6}e\Omega\mathscr{R}-e\,\partial_mA_i\,\partial^mA_i^*\\ &-\frac{i}{2}e[\chi_i\sigma^m\mathscr{D}_m\overline{\chi}_i+\overline{\chi}_i\overline{\sigma}^m\mathscr{D}_m\chi_i]\\ &-\frac{1}{12}e\Omega\varepsilon^{k\ell mn}[\overline{\psi}_k\overline{\sigma}_\ell\psi_{mn}-\psi_k\sigma_\ell\overline{\psi}_{mn}]\\ &+\frac{1}{4}e\varepsilon^{k\ell mn}(\Omega_i\partial_kA_i-\Omega_{i^*}\partial_kA_i^*)\psi_\ell\sigma_m\overline{\psi}_n\\ &-\frac{1}{2}\sqrt{2}\,e[\overline{\psi}_n\overline{\sigma}^m\sigma^n\overline{\chi}_i\partial_mA_i+\psi_n\sigma^m\overline{\sigma}^n\chi_i\partial_mA_i^*]\\ &+\frac{1}{3}\sqrt{2}\,e[\Omega_i\chi_i\sigma^{mn}\psi_{mn}+\Omega_{i^*}\overline{\chi}_i\overline{\sigma}^{mn}\overline{\psi}_{mn}]\\ &-\frac{i}{2}\sqrt{2}\,eP_i\chi_i\sigma^a\overline{\psi}_a-\frac{i}{2}\sqrt{2}\,eP_{i^*}^*\overline{\chi}_i\overline{\sigma}^a\psi_a\\ &-\frac{1}{2}eP_{ij}\chi_i\chi_j-\frac{1}{2}eP_{i^*j^*}^*\overline{\chi}_i\overline{\chi}_j\end{aligned}$$

$$- eP\overline{\psi}_a\overline{\sigma}^{ab}\overline{\psi}_b - eP^*\psi_a\sigma^{ab}\psi_b \tag{21.13}$$

はラグランジアンの運動項部分で，

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{aux} = &\frac{1}{9}e\Omega|M - 3(\log\Omega)_{i^*}F_i^*|^2 + e\Omega(\log\Omega)_{ij^*}F_iF_j^* \\ &- \frac{1}{9}e\Omega b_a b^a - \frac{i}{3}e(\Omega_i\partial_m A_i - \Omega_{i^*}\partial_m A_i^*)b^m \\ &- \frac{1}{6}e\chi_i\sigma^a\overline{\chi}_i b_a + \frac{i}{6}\sqrt{2}\,e(\Omega_i\chi_i\psi_m - \Omega_{i^*}\overline{\chi}_i\overline{\psi}_m)b^m \\ &- ePM^* - eP^*M + eP_iF_i + eP_{i^*}^*F_i^*\end{aligned} \tag{21.14}$$

は補助場の寄与，$\mathscr{L}_{quartic}$ は当面は無視する 4 体フェルミ項を含んでいる．式 (21.13), (21.14) で，Ω と P は以前と同じであるが，超場 Φ_i，$\Phi_i{}^+$ はその最低次成分 A_i，A_i^* でおき換えられている．Ω と P の添字は，スカラー場に関する微分を記している．例えば，$P_i = (\partial/\partial A_i)P$，$\Omega_{i*} = (\partial/\partial A_i^*)\Omega$ である．

さらに進むために，$\mathscr{L}_{aux}$ から補助場を消去する．これは，シフト $N = M - 3(\log\Omega)_{i*}F_i^*$ により最も容易にできる．シフトは N と F_i の結合を解き，運動方程式が簡単に解ける：

$$\begin{aligned} N &= 9P\Omega^{-1} \\ \Omega(\log\Omega)_{ij^*}F_i &= -P_{j^*}^* + 3P^*(\log\Omega)_{j^*} \\ b_a &= -\frac{3}{2}i(\Omega_i\partial_a A_i - \Omega_{i^*}\partial_a A_i^*)\Omega^{-1} - \frac{3}{4}\chi_i\sigma_a\overline{\chi}_i\Omega^{-1} \\ &\quad + \frac{3}{4}\sqrt{2}\,i(\Omega_i\chi_i\psi_a - \Omega_{i^*}\overline{\chi}_i\overline{\psi}_a)\Omega^{-1}.\end{aligned} \tag{21.15}$$

式 (21.15) を式 (21.14) に代入して，

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{aux} = &-9ePP^*\Omega^{-1} \\ &- e(\log\Omega)^{-1}_{ij^*}[P_i - 3P(\log\Omega)_i][P_{j^*}^* - 3P^*(\log\Omega)_{j^*}]\Omega^{-1} \\ &- \frac{1}{4}e[\Omega_i\partial_a A_i - \Omega_{i^*}\partial_a A_i^*][(\Omega_j\partial^a A_j - \Omega_{j^*}\partial^a A_j^*) \\ &- i\chi_j\sigma^a\overline{\chi}_j - \sqrt{2}(\Omega_j\chi_j\psi^a - \Omega_{j^*}\overline{\chi}_j\overline{\psi}^a)]\Omega^{-1} + \cdots,\end{aligned} \tag{21.16}$$

を得る．点列は，$\mathscr{L}_{quartic}$ に押し込んだ追加的な 4 体フェルミ項を記している．式 (21.16) は，微分項，フェルミオン質量項，湯川結合とスカラーポテンシャルを含んでおり，それを $\mathscr{V}(A, A^*)$ とよぶ．

上の表現は模型構築にはまったく不十分である．物理的な場の規格化を調べる必要がある．式 (21.13) から，重力作用が見慣れないブランス–ディッケ（Brans–Dicke）型であることに気付く．この規格化は，重力場に依存するワイル・リスケーリング：

$$e_n{}^a \to e_n{}^a \exp(\lambda) \tag{21.17}$$

をすることによって固定される．ここで，

$$\exp(2\lambda) = -\frac{3}{\Omega} \tag{21.18}$$

である．この変換は，アインシュタイン作用に対する正準規格化 (21.3) を回復する．物質場の規格化はスピノルの場に依存する再定義

$$\begin{aligned} \chi_i &\to \exp(-\lambda/2)\chi_i \\ \psi_m &\to \exp(\lambda/2)\psi_m \end{aligned} \tag{21.19}$$

と，それに続くグラビティーノの追加的シフト

$$\psi_m \to \psi_m + i\sqrt{2}\,\sigma_m \overline{\chi}_i \lambda_{i^*} \tag{21.20}$$

を通じて回復される．$\mathscr{L}_{quartic}$ からの 4 体フェルミ項を加えて，変換 (21.17)～(21.20) を実行し，われわれは超重力物質結合に対する最終結果を得る：

$$\begin{aligned} \mathscr{L} = &- \frac{1}{2}e\mathscr{R} - eK_{ij^*}\,\partial_m A_i\,\partial^m A_j^* \\ &- \frac{i}{2}eK_{ij^*}[\chi_i\sigma^m\mathscr{D}_m\overline{\chi}_j + \overline{\chi}_j\overline{\sigma}^m\mathscr{D}_m\chi_i] \\ &+ \frac{1}{2}e\varepsilon^{k\ell mn}[\overline{\psi}_k\overline{\sigma}_\ell\tilde{\mathscr{D}}_m\psi_n - \psi_k\sigma_\ell\tilde{\mathscr{D}}_m\overline{\psi}_n] \\ &+ \frac{1}{4}e\varepsilon^{k\ell mn}(K_i\partial_k A_i - K_{i^*}\partial_k A_i^*)\psi_\ell\sigma_m\overline{\psi}_n \\ &- \frac{i}{4}e[K_{ij^*}(K_k\partial_m A_k - K_{k^*}\partial_m A_k^*) \\ &- 2(K_{ij^*k}\partial_m A_k - K_{ij^*k^*}\partial_m A_k^*)]\chi_i\sigma^m\overline{\chi}_j \\ &- \frac{1}{2}\sqrt{2}\,eK_{ij^*}\partial_n A_j^*\chi_i\sigma^m\overline{\sigma}^n\psi_m - \frac{1}{2}\sqrt{2}\,eK_{ij^*}\partial_n A_i\overline{\chi}_j\overline{\sigma}^m\sigma^n\overline{\psi}_m \\ &+ \frac{1}{4}eK_{ij^*}[i\varepsilon^{k\ell mn}\psi_k\sigma_\ell\overline{\psi}_m + \psi_m\sigma^n\overline{\psi}^m]\chi_i\sigma_n\overline{\chi}_j \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{16}e[K_{ij^*}K_{k\ell^*}-2K_{ij^*k\ell^*}+2K^{rs^*}K_{iks^*}K_{j^*\ell^*r}]\chi_i\sigma_m\overline{\chi}_j\chi_k\sigma^m\overline{\chi}_\ell\\
&+e\exp(K/2)\Big\{-P^*\psi_a\sigma^{ab}\psi_b-P\overline{\psi}_a\overline{\sigma}^{ab}\overline{\psi}_b\\
&-\frac{i}{2}\sqrt{2}\,D_iP\chi_i\sigma^a\overline{\psi}_a-\frac{i}{2}\sqrt{2}\,D_{i^*}P^*\overline{\chi}_i\overline{\sigma}^a\psi_a\\
&-\frac{1}{2}[P_{ij}+K_{ij}P+K_iD_jP+K_jD_iP-K_iK_jP\\
&-K^{k\ell^*}K_{ij\ell^*}D_kP]\chi_i\chi_j-\frac{1}{2}[P^*_{i^*j^*}+K_{i^*j^*}P^*+K_{i^*}D_{j^*}P^*\\
&+K_{j^*}D_{i^*}P^*-K_{i^*}K_{j^*}P^*-K^{k^*\ell}K_{i^*j^*\ell}D_{k^*}P^*]\overline{\chi}_i\overline{\chi}_j\Big\}\\
&-e\exp(K)[K^{ij^*}(D_iP)(D_jP)^*-3P^*P]. \qquad \textbf{(21.21)}
\end{aligned}
$$

ここで，$D_iP=P_i+K_iP$，$K(A,A^*)=-3\log(-\Omega/3)$，そして，$K^{ij*}=K^{-1}_{ij*}$ である．この表現で，$\Omega(A,A^*)=A_i^+A_i+c_i(A_i^++A_i)-3$，そして，$P(A)=d+a_iA_i+(1/2)m_{ij}A_iA_j+(1/3)g_{ijk}A_iA_jA_k$ である．第 23 章で，われわれは，一般的なカイラル結合に対して，同様な結果を導く．

式 (21.21) は，極小カイラル模型の，最大（full）の超重力結合を与える．それはすべての物理的場に対し適切に規格化された運動エネルギーをもち，4 体フェルミ項の最大の組が含まれる．式 (21.21) は，超空間形式から導かれているため（全微分までで）超重力変換に対して自動的に不変である．それはまた，正しい平坦空間の極限 (21.1) をもっている．

式 (21.21) から，超重力のスカラーポテンシャルエネルギーがまったく一般的な形

$$
\mathscr{V}(A_i,A_j^*)=\exp(K)[K^{ij^*}(D_iP)(D_jP)^*-3P^*P] \qquad \textbf{(21.22)}
$$

になって現れることがみてとれる．この表現が正定値でないこと，したがってスカラーポテンシャルと超対称性の破れの関係が前よりもいっそう微妙なことに留意せよ．第 23 章で，自発的超対称性の破れの合図が $\langle D_iP\rangle\neq 0$ であることをみる．式 (21.22) は，超対称性がゼロ（*zero*）真空期待値で自発的に破れる可能性があることを示している．

前の表現は，実関数 $K(A,A^*)$ ですべて書かれている．次章では，この関数がケーラー・ポテンシャル（*Kähler potential*）とよばれること，そして，式 (21.21)，(21.22) が複素幾何の言葉に自然に翻訳されることをみる．

文　献

S. Deser and B. Zumino: Phys. Lett. **62B**, 335 (1976).
D. Z. Freedman, S. Ferrara, P. van Nieuwenhuizen: Phys. Rev. **D13**, 3214 (1976).

重要な式

$$\mathscr{L}_{S.G.} = -\frac{6}{\kappa^2}\int d^2\Theta\,\mathscr{E}R + \text{h.c.} \tag{21.2}$$

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{S.G.} = & -\frac{1}{2}e\mathscr{R} - \frac{1}{3}eM^*M + \frac{1}{3}eb^a b_a \\ & + \frac{1}{2}e\varepsilon^{k\ell mn}(\overline{\psi}_k\overline{\sigma}_\ell\tilde{\mathscr{D}}_m\psi_n - \psi_k\sigma_\ell\tilde{\mathscr{D}}_m\overline{\psi}_n)\end{aligned} \tag{21.3}$$

$$\begin{aligned}\mathscr{L} = \int d^2\Theta\, 2\mathscr{E}\Big[& -3R - \frac{1}{8}(\overline{\mathscr{D}}\,\overline{\mathscr{D}} - 8R)\Phi_i{}^+\Phi_i \\ & - \frac{1}{8}(\overline{\mathscr{D}}\,\overline{\mathscr{D}} - 8R)(c_i\Phi_i + \overline{c}_i\Phi_i{}^+) + d + a_i\Phi_i \\ & + \frac{1}{2}m_{ij}\Phi_i\Phi_j + \frac{1}{3}g_{ijk}\Phi_i\Phi_j\Phi_k\Big] + \text{h.c.}\end{aligned} \tag{21.6}$$

$$\begin{aligned}\Phi_i &= A_i + \sqrt{2}\,\Theta\chi_i + \Theta\Theta F_i \\ 2\mathscr{E} &= e\{1 + i\Theta\sigma^a\overline{\psi}_a - \Theta\Theta[M^* + \overline{\psi}_a\overline{\sigma}^{ab}\overline{\psi}_b]\} \\ R &= -\frac{1}{6}\Big\{M + \Theta[\sigma^a\overline{\sigma}^b\psi_{ab} - i\sigma^a\overline{\psi}_a M + i\psi_a b^a] \\ & \quad + \Theta\Theta\Big[-\frac{1}{2}\mathscr{R} + i\overline{\psi}^a\overline{\sigma}^b\psi_{ab} + \frac{2}{3}MM^* \\ & \quad + \frac{1}{3}b^a b_a - ie_a{}^m\mathscr{D}_m b^a + \frac{1}{2}\overline{\psi}\,\overline{\psi}M - \frac{1}{2}\psi_a\sigma^a\overline{\psi}_c b^c \\ & \quad + \frac{1}{8}\varepsilon^{abcd}[\overline{\psi}_a\overline{\sigma}_b\psi_{cd} + \psi_a\sigma_b\overline{\psi}_{cd}]\Big]\Big\}\end{aligned} \tag{21.8}$$

$$\begin{aligned}\Xi_\imath = & -4F_i^* + \frac{4}{3}MA_i^* + \Theta\Big\{-4i\sqrt{2}\,\sigma^c\hat{D}_c\overline{\chi}_\imath - \frac{2}{3}\sqrt{2}\,\sigma^a b_a\overline{\chi}_\imath \\ & + \frac{4}{3}A_i^*(2\sigma^{ab}\psi_{ab} - i\sigma^a\overline{\psi}_a M + i\psi_a b^a)\Big\} \\ & + \Theta\Theta\Big\{-4e_a{}^m\mathscr{D}_m\hat{D}^a A_i^* - \frac{8}{3}ib_a\hat{D}^a A_i^* \\ & - \frac{2}{3}\sqrt{2}\,\overline{\psi}_{ab}\overline{\sigma}^{ab}\overline{\chi}_i + 2\sqrt{2}\,\overline{\psi}_a\hat{D}^a\overline{\chi}_i - \frac{8}{3}M^*F_\imath^*\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& -\frac{2}{3} i\sqrt{2}\,\overline{\psi}_a \overline{\chi}_i b^a + \frac{1}{3} i\sqrt{2}\,\overline{\psi}_a \overline{\sigma}^a \sigma^c \overline{\chi}_i b_c \\
& + \frac{4}{3} A_i^* \Bigg[-\frac{1}{2}\mathscr{R} + i\overline{\psi}^a \overline{\sigma}^b \psi_{ab} - i e_a{}^m \mathscr{D}_m b^a \\
& + \frac{2}{3} M^* M + \frac{1}{3} b_a b^a + \frac{1}{2}\,\overline{\psi}\,\overline{\psi} M - \frac{1}{2}\psi_a \sigma^a \overline{\psi}_c b^c \\
& + \frac{1}{8}\varepsilon^{abcd}(\overline{\psi}_a \overline{\sigma}_b \psi_{cd} + \psi_a \sigma_b \overline{\psi}_{cd}) \Bigg] \Bigg\}
\end{aligned} \tag{21.10}
$$

$$
\begin{aligned}
\hat{D}_a A_i^* &= e_a{}^m \partial_m A_i^* - \frac{1}{2}\sqrt{2}\,\overline{\psi}_{a\dot{\kappa}} \overline{\chi}_i^{\dot{\kappa}} \\
\hat{D}_a \overline{\chi}_{i\dot{\alpha}} &= e_a{}^m \mathscr{D}_m \overline{\chi}_{i\dot{\alpha}} + \frac{i}{2}\sqrt{2}\,\psi_a{}^\beta \sigma_{\beta\dot{\alpha}}{}^b \hat{D}_b A_i^* - \frac{1}{2}\sqrt{2}\,\overline{\psi}_{a\dot{\alpha}} F_i^*
\end{aligned} \tag{21.11}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L} = & -\frac{1}{2} e\mathscr{R} - eK_{ij^*}\,\partial_m A_i\,\partial^m A_j^* \\
& - \frac{i}{2} eK_{ij^*}[\chi_i \sigma^m \mathscr{D}_m \overline{\chi}_j + \overline{\chi}_j \overline{\sigma}^m \mathscr{D}_m \chi_i] \\
& + \frac{1}{2} e\varepsilon^{k\ell mn}[\overline{\psi}_k \overline{\sigma}_\ell \tilde{\mathscr{D}}_m \psi_n - \psi_k \sigma_\ell \tilde{\mathscr{D}}_m \overline{\psi}_n] \\
& + \frac{1}{4} e\varepsilon^{k\ell mn}(K_i \partial_k A_i - K_{i^*} \partial_k A_i^*)\psi_\ell \sigma_m \overline{\psi}_n \\
& - \frac{i}{4} e[K_{ij^*}(K_k \partial_m A_k - K_{k^*} \partial_m A_k^*) \\
& - 2(K_{ij^*k} \partial_m A_k - K_{ij^*k^*} \partial_m A_k^*)]\chi_i \sigma^m \overline{\chi}_j \\
& - \frac{1}{2}\sqrt{2}\, eK_{ij^*} \partial_n A_j^* \chi_i \sigma^m \overline{\sigma}^n \psi_m - \frac{1}{2}\sqrt{2}\, eK_{ij^*} \partial_n A_i \overline{\chi}_j \overline{\sigma}^m \sigma^n \overline{\psi}_m \\
& + \frac{1}{4} eK_{ij^*}[i\varepsilon^{k\ell mn} \psi_k \sigma_\ell \overline{\psi}_m + \psi_m \sigma^n \overline{\psi}^m]\chi_i \sigma_n \overline{\chi}_j \\
& + \frac{1}{16} e[K_{ij^*} K_{k\ell^*} - 2K_{ij^*k\ell^*} + 2K^{rs^*} K_{iks^*} K_{j^*\ell^*r}]\chi_i \sigma_m \overline{\chi}_j \chi_k \sigma^m \overline{\chi}_\ell \\
& + e\exp(K/2)\Bigg\{ -P^* \psi_a \sigma^{ab} \psi_b - P\overline{\psi}_a \overline{\sigma}^{ab} \overline{\psi}_b \\
& - \frac{i}{2}\sqrt{2}\, D_i P \chi_i \sigma^a \overline{\psi}_a - \frac{i}{2}\sqrt{2}\, D_{i^*} P^* \overline{\chi}_i \overline{\sigma}^a \psi_a \\
& - \frac{1}{2}[P_{ij} + K_{ij} P + K_i D_j P + K_j D_i P - K_i K_j P \\
& - K^{k\ell^*} K_{ij\ell^*} D_k P]\chi_i \chi_j - \frac{1}{2}[P^*_{i^*j^*} + K_{i^*j^*} P^* + K_{i^*} D_{j^*} P^* \\
& + K_{j^*} D_{i^*} P^* - K_{i^*} K_{j^*} P^* - K^{k^*\ell} K_{i^*j^*\ell} D_{k^*} P^*]\overline{\chi}_i \overline{\chi}_j \Bigg\}
\end{aligned}
$$

$$- e\exp(K)[K^{ij^*}(D_iP)(D_jP)^* - 3P^*P] \tag{21.21}$$

$$\mathscr{V}(A_i, A_j^*) = \exp(K)[K^{ij^*}(D_iP)(D_jP)^* - 3P^*P] \tag{21.22}$$

演　　習

(1)　望む数だけ，次の関係式を証明せよ．

(a)　$\Phi^+| = A^*$

(b)　$\mathscr{D}_\beta \Phi^+| = 0$

(c)　$\overline{\mathscr{D}}_{\dot\alpha} \Phi^+| = \sqrt{2}\,\overline{\chi}_{\dot\alpha}$

(d)　$\mathscr{D}_\alpha \mathscr{D}_\beta \Phi^+| = 0$

(e)　$\overline{\mathscr{D}}_{\dot\alpha} \overline{\mathscr{D}}_{\dot\beta} \Phi^+| = 2\varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta} F^*$

(f)　$\overline{\mathscr{D}}_{\dot\alpha} \mathscr{D}_\beta \Phi^+| = 0$

(g)　$\mathscr{D}_\beta \overline{\mathscr{D}}_{\dot\alpha} \Phi^+| = -2i\sigma_{\beta\dot\alpha}{}^a \hat{D}_a A^*$

(h)　$\mathscr{D}_\alpha \mathscr{D}_\beta \mathscr{D}_\gamma \Phi^+| = 0$

(i)　$\overline{\mathscr{D}}_{\dot\alpha} \mathscr{D}_\alpha \mathscr{D}_\beta \Phi^+| = 0$

(j)　$\mathscr{D}_\alpha \overline{\mathscr{D}}_{\dot\alpha} \mathscr{D}_\beta \Phi^+| = 0$

(k)　$\mathscr{D}_\alpha \mathscr{D}_\beta \overline{\mathscr{D}}_{\dot\alpha} \Phi^+| = -\dfrac{2}{3}\sqrt{2}\,\varepsilon_{\alpha\beta}\overline{\chi}_{\dot\alpha} M^*$

(l)　$\overline{\mathscr{D}}_{\dot\alpha} \overline{\mathscr{D}}_{\dot\beta} \mathscr{D}_\alpha \Phi^+| = 0$

(m)　$\overline{\mathscr{D}}_{\dot\alpha} \mathscr{D}_\alpha \overline{\mathscr{D}}_{\dot\beta} \Phi^+| = -i\,2\sqrt{2}\,\sigma_{\alpha\dot\beta}{}^c \hat{D}_c \overline{\chi}_{\dot\alpha} + \dfrac{1}{6}\sqrt{2}\,(\overline{\chi}_{\dot\beta} b_{\alpha\dot\alpha} - 3\overline{\chi}_\alpha b_{\alpha\dot\beta} - 3\varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta} b_{\alpha\dot\gamma}\overline{\chi}^{\dot\gamma})$

(n)　$\mathscr{D}_\alpha \overline{\mathscr{D}}_{\dot\alpha} \overline{\mathscr{D}}_{\dot\beta} \Phi^+| = i\,2\sqrt{2}\,\varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\sigma_{\alpha\gamma}{}^c \hat{D}_c \overline{\chi}^{\dot\gamma} + \dfrac{1}{3}\sqrt{2}\,\varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta} b_{\alpha\dot\gamma}\overline{\chi}^{\dot\gamma}$

(o)　$\mathscr{D}_a \Phi^+| = \hat{D}_a A^* = e_a{}^m \mathscr{D}_m A^* - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,\overline{\psi}_{a\dot\alpha}\overline{\chi}^{\dot\alpha}$

(p)　$\mathscr{D}_a \mathscr{D}_\beta \Phi^+| = 0$

(q)　$\mathscr{D}_\alpha \mathscr{D}_c \Phi^+| = -\dfrac{i}{6}\sqrt{2}\,\sigma_{c\alpha\dot\beta}\overline{\chi}^{\dot\beta} M^*$

(r) $\mathscr{D}_c\overline{\mathscr{D}}_{\dot\alpha}\Phi^+| = \sqrt{2}\,\hat{D}_c\overline{\chi}_{\dot\alpha}$

$$= \sqrt{2}\left(e_c{}^m\mathscr{D}_m\overline{\chi}_{\dot\alpha} + \frac{i}{\sqrt{2}}\,\psi_c{}^\beta\sigma_{\beta\dot\alpha}{}^a\hat{D}_aA^* - \frac{1}{\sqrt{2}}\,\overline{\psi}_{c\dot\alpha}F^*\right)$$

(s) $\overline{\mathscr{D}}_{\dot\alpha}\mathscr{D}_c\Phi^+| = \sqrt{2}\left\{\hat{D}_c\overline{\chi}_{\dot\alpha} - \frac{i}{24}\,\overline{\sigma}_c{}^{\dot\beta\beta}(\overline{\chi}_{\dot\beta}b_{\beta\dot\alpha} - 3\overline{\chi}_{\dot\alpha}b_{\beta\dot\beta} - 3\varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta}b_{\beta\dot\kappa}\overline{\chi}^{\dot\kappa})\right\}$

(t) $\mathscr{D}_a\mathscr{D}_b\Phi^+| = e_a{}^m\mathscr{D}_m\hat{D}_bA^* + \frac{i}{12}\sqrt{2}\,\psi_a{}^\alpha\sigma_{b\alpha\dot\beta}\overline{\chi}^{\dot\beta}M^*$

$$+ \frac{1}{2}\sqrt{2}\,\overline{\psi}_a{}^{\dot\alpha}\Big\{\hat{D}_b\overline{\chi}_{\dot\alpha} - \frac{i}{24}\,\overline{\sigma}_b{}^{\dot\beta\beta}(\overline{\chi}_{\dot\beta}b_{\beta\dot\alpha}$$

$$- 3\overline{\chi}_{\dot\alpha}b_{\beta\dot\beta} - 3\varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta}b_{\beta\dot\kappa}\overline{\chi}^{\dot\kappa})\Big\}$$

(u) $\mathscr{D}_c\mathscr{D}_\alpha\mathscr{D}_\beta\Phi^+| = 0$

(v) $\mathscr{D}_\alpha\mathscr{D}_c\mathscr{D}_\beta\Phi^+| = 0$

(w) $\mathscr{D}_\alpha\mathscr{D}_\beta\mathscr{D}_c\Phi^+| = i\sqrt{2}\,\sigma_{c\beta\dot\beta}\overline{\chi}^{\dot\beta}\mathscr{D}_\alpha R^+| - \frac{1}{3}(\sigma^a\overline{\sigma}^c\varepsilon)_{\alpha\beta}M^*\hat{D}_aA^*$

(x) $\mathscr{D}^\alpha\mathscr{D}_\alpha\overline{\mathscr{D}}_{\dot\alpha}\overline{\mathscr{D}}^{\dot\alpha}\Phi^+| = 16e_a{}^m\mathscr{D}_m\hat{D}_aA^* + \frac{32}{3}ib^a\hat{D}_aA^*$

$$- 8\sqrt{2}\,\overline{\psi}_a\hat{D}^a\overline{\chi} + \frac{32}{3}M^*F^* + \frac{8}{3}\sqrt{2}\,\overline{\psi}_{mn}\overline{\sigma}^{mn}\overline{\chi}$$

$$+ \frac{8}{3}i\sqrt{2}\,\overline{\psi}_a\overline{\chi}b^a - \frac{4}{3}i\sqrt{2}\,\overline{\psi}_a\overline{\sigma}^a\sigma^c\overline{\chi}b_c.$$

(2) 式 (21.10) を導くのに，上の関係式を使え．

(3) $\mathscr{L}_{kin}$ と $\mathscr{L}_{aux}$ が式 (21.3) と式 (21.4) でそれぞれ与えられることを証明せよ．

(4) ワイル・リスケーリング (21.17) が，

$$\frac{1}{6}e\Omega\mathscr{R} \to -\frac{1}{2}e\mathscr{R} - \frac{3}{4}e\Omega^{-2}\,\partial_m\Omega\,\partial^m\Omega + \frac{3}{2}\,\partial_m[eg^{mn}\Omega^{-1}\,\partial_n\Omega]$$

であることを示せ．

(5) 演習 (4) の結果を使って，式 (21.17)～(21.20) が式 (21.21) の正しい運動エネルギーを与えることを示せ．

(6) 式 (21.14) と式 (21.17)～(21 20) を使って，ポテンシャル (21.22) が本当に正しいことを調べよ．

(7) $\Omega(A, A^*) = A_i{}^*A_i - 3$ に対して，場の再定義，

$$A_1' = \frac{A_1 + a}{1 + \frac{1}{3}a^*A_1}, \qquad A_i' = \frac{A_i\sqrt{1 - \frac{1}{3}|a|^2}}{1 + \frac{1}{3}a^*A_1} \quad (i \neq 1)$$

がケーラー変換，

$$K(A',A'^*)=K(A,A^*)-3\log\frac{1-\frac{1}{3}|a|^2}{\left|1+\frac{1}{3}a^*A_1\right|^2}$$

を引き起こすことを示せ．付録 C で議論されるように，これは，ケーラー幾何を不変に保つ，等長変換（isometry transformation）である．このような変換の後で，超重力ポテンシャル $\mathscr{V}$ は 3 次の超ポテンシャル P に再度関係付けられることに留意せよ．この事情が極小カイラル超重力模型を特徴付ける．

(8)　$\Omega=A^*A-3$，$P=\mu\{1+(1/3)\sqrt{3}A\}^3$ とする．ポテンシャル $\mathscr{V}$ が消えることを示せ．ポテンシャルは期待値 $\langle \mathrm{A}\rangle$ を決定しないので，A は「スライディングシングレット」とよばれる．グラビティーノの質量も同様にスライドして，

$$m_{3/2}=\mu\left(\frac{1+a}{\sqrt{1-|a|^2}}\right)^3.$$

ここで $\langle A\rangle=\sqrt{3}a$ となることを示せ．

22. カイラル模型とケーラー幾何

前章で，われわれはカイラル超場の超重力への極小結合を構築した．その結果のラグランジアンは，ケーラー・ポテンシャルとその微分で書けることをみた．以下の議論で，われわれは物質結合とケーラー幾何の関係を探ることから始める．われわれは平坦な空間で仕事をするが，そこでは接続が最初に現れ，第 23 章までは曲がった空間の一般化はしない．ケーラー幾何学へのおおまかな導入は付録 C で与えられる．

カイラル超場 Φ^i $(i = 1, \cdots, n)$ から構築される最も一般的なラグランジアンから出発する．このラグランジアンは非常に簡単な形をとり，

$$\mathscr{L} = \int d^2\theta\, d^2\overline{\theta}\, K(\Phi^i, \Phi^{+j}) + \left[\int d^2\theta\, P(\Phi^i) + \mathrm{h.c.}\right]. \qquad \mathbf{(22.1)}$$

ここで K，P は超場で，カイラル超場 Φ^i により級数展開される．

$$\begin{aligned} K(\Phi, \Phi^+) &= \sum c_{i_1 \cdots i_N, j_1 \cdots j_M} \Phi^{i_1} \cdots \Phi^{i_N} \Phi^{+j_1} \cdots \Phi^{+j_M} \\ P(\Phi) &= \sum g_{i_1 \cdots i_N} \Phi^{i_1} \cdots \Phi^{i_N}. \end{aligned} \qquad (22.2)$$

成分場のラグランジアンを見つけるためには，K と P を θ 変数で展開しなければならない．各場の展開は式 (5.3)，(5.5) で与えられた．超ポテンシャル P に対しては，式 (5.7)，(5.8) からただちに展開されて

$$P(\Phi) = P(A) + \sqrt{2}\,\theta\chi^i \frac{\partial P(A)}{\partial A^i} + \theta\theta\left\{F^i \frac{\partial P(A)}{\partial A^i} - \frac{1}{2}\chi^i\chi^j \frac{\partial^2 P(A)}{\partial A^i\, \partial A^j}\right\}. \qquad (22.3)$$

ここで，すべての成分場は $y^m = x^m + i\theta\sigma^m\overline{\theta}$ の関数である．共役超ポテンシャル P^+ の展開も類似しており，

$$\begin{aligned} P^+(\Phi^+) = P^*(A^*) &+ \sqrt{2}\,\overline{\theta}\,\overline{\chi}^i \frac{\partial P^*(A^*)}{\partial A^{*i}} \\ &+ \overline{\theta}\,\overline{\theta}\left\{F^{*i} \frac{\partial P^*(A^*)}{\partial A^{*i}} - \frac{1}{2}\,\overline{\chi}^i\overline{\chi}^j \frac{\partial^2 P^*(A^*)}{\partial A^{*i}\, \partial A^{*j}}\right\}. \end{aligned} \qquad (22.4)$$

ここで場は y^+ の関数である．

$K(\Phi, \Phi^+)$ の θ 展開は，単項式

$$K_{NM} = \Phi^{i_1} \cdots \Phi^{i_N} \Phi^{+j_1} \cdots \Phi^{+j_M} \tag{22.5}$$

から出発して計算できる．その $(\theta\theta\overline{\theta}\,\overline{\theta})$ 成分は式 (5.9) と式 (22.3)，(22.4) の適切な解釈，

$$\begin{aligned} K_{NM} = \cdots + \theta\theta\overline{\theta}\,\overline{\theta} \Big\{ & \left[F^k \frac{\partial}{\partial A^k} (A^{i_1} \cdots A^{i_N}) - \frac{1}{2} \chi^k \chi^\ell \frac{\partial^2 (A^{i_1} \cdots A^{i_N})}{\partial A^k \, \partial A^\ell} \right] \\ & \times \left[F^{*k} \frac{\partial}{\partial A^{*k}} (A^{*j_1} \cdots A^{*j_M}) - \frac{1}{2} \overline{\chi}^k \overline{\chi}^\ell \frac{\partial^2 (A^{*j_1} \cdots A^{*j_M})}{\partial A^{*k} \, \partial A^{*\ell}} \right] \\ & - \partial_m (A^{i_1} \cdots A^{i_N}) \, \partial^m (A^{*j_1} \cdots A^{*j_M}) \\ & - i \frac{\partial}{\partial A^{*k}} (A^{*j_1} \cdots A^{*j_M}) \overline{\chi}^k \overline{\sigma}^m \partial_m \left(\chi^\ell \frac{\partial (A^{i_1} \cdots A^{i_N})}{\partial A^\ell} \right) \Big\} \end{aligned} \tag{22.6}$$

との助けで見つけられる．ここでわれわれは部分積分を使った．この結果は，超場 (22.5) の最低次成分である．$K_{NM}|$ の微分係数を用いると，より優美に書き直すことができる．

$$\begin{aligned} K_{NM} = \cdots + \theta\theta\overline{\theta}\,\overline{\theta} \Big\{ & \frac{\partial^2 K_{NM}|}{\partial A^i \, \partial A^{*j}} F^i F^{*j} \\ & - \frac{1}{2} \frac{\partial^3 K_{NM}|}{\partial A^i \, \partial A^{*j} \, \partial A^{*k}} F^i \overline{\chi}^j \overline{\chi}^k - \frac{1}{2} \frac{\partial^3 K_{NM}|}{\partial A^{*i} \, \partial A^j \, \partial A^k} F^{*i} \chi^j \chi^k \\ & + \frac{1}{4} \frac{\partial^4 K_{NM}|}{\partial A^i \, \partial A^j \, \partial A^{*k} \, \partial A^{*\ell}} \chi^i \chi^j \overline{\chi}^k \overline{\chi}^\ell \\ & - \frac{\partial^2 K_{NM}|}{\partial A^i \, \partial A^{*j}} \partial_m A^i \, \partial^m A^{*j} - i \frac{\partial^2 K_{NM}|}{\partial A^i \, \partial A^{*j}} \overline{\chi}^j \overline{\sigma}^m \partial_m \chi^i \\ & - i \frac{\partial^3 K_{NM}|}{\partial A^i \, \partial A^j \, \partial A^{*k}} \overline{\chi}^k \overline{\sigma}^m \chi^i \partial_m A^j \Big\}. \end{aligned} \tag{22.7}$$

式 (22.7) はまた，K の完全な多項式に対しても正しい．表現はケーラー多様体の表記法，

$$\begin{aligned} g_{ij^*} &= \frac{\partial}{\partial A^i} \frac{\partial}{\partial A^{*j}} K| \\ g_{ij^*,k} &= \frac{\partial}{\partial A^k} g_{ij^*} = g_{mj^*} \Gamma^m_{ik} \\ g_{ij^*,k^*} &= \frac{\partial}{\partial A^{*k}} g_{ij^*} = g_{im^*} \Gamma^{m^*}_{j^*k^*} \end{aligned} \tag{22.8}$$

で簡単になる．結果は

$$K = \cdots + \theta\theta\overline{\theta}\,\overline{\theta}\Big\{ g_{ij^*} F^i F^{*j} - \frac{1}{2} g_{im^*} \Gamma^{m^*}_{j^* k^*} F^i \overline{\chi}^j \overline{\chi}^k$$
$$- \frac{1}{2} g_{mi^*} \Gamma^m_{jk} F^{*i} \chi^j \chi^k + \frac{1}{4} g_{ij^*, k\ell^*} \chi^i \chi^k \overline{\chi}^j \overline{\chi}^\ell$$
$$- g_{ij^*} \partial_m A^i \, \partial^m A^{*j} - i g_{ij^*} \overline{\chi}^j \overline{\sigma}^m \partial_m \chi^i$$
$$- i g_{mk^*} \Gamma^m_{ij} \overline{\chi}^k \overline{\sigma}^m \chi^i \partial_m A^j \Big\}. \tag{22.9}$$

いまや，ラグランジアンを成分場で書くのに必要なすべてがそろった．式 (22.3) と (22.9) を式 (22.1) に代入して，

$$\mathscr{L} = g_{ij^*} F^i F^{*j} + \frac{1}{4} g_{ij^*, k\ell^*} \chi^i \chi^k \overline{\chi}^j \overline{\chi}^\ell$$
$$- F^i \left\{ \frac{1}{2} g_{im^*} \Gamma^{m^*}_{j^* k^*} \overline{\chi}^j \overline{\chi}^k - \frac{\partial P}{\partial A^i} \right\} - F^{*i} \left\{ \frac{1}{2} g_{mi^*} \Gamma^m_{jk} \chi^j \chi^k - \frac{\partial P^*}{\partial A^{*i}} \right\}$$
$$- g_{ij^*} \partial_m A^i \, \partial^m A^{*j} - i g_{ij^*} \overline{\chi}^j \overline{\sigma}^m D_m \chi^i$$
$$- \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial A^i \, \partial A^j} \chi^i \chi^j - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P^*}{\partial A^{*i} \, \partial A^{*j}} \overline{\chi}^i \overline{\chi}^j \tag{22.10}$$

を得る．ここで $D_m \chi^i = \partial_m \chi^i + \Gamma^i_{jk} \partial_m A^j \chi^k$ は共変的時空微分で，χ^i はケーラー多様体上の変換 (C.1) のもとで反変ベクトルのように変換すると仮定する．

この表現中の補助場は，そのオイラー方程式

$$g_{ij^*} F^i - \frac{1}{2} g_{kj^*} \Gamma^k_{m\ell} \chi^m \chi^\ell + \frac{\partial P^*}{\partial A^{*j}} = 0 \tag{22.11}$$

で消去してよい．式 (22.10) に代入して，成分場ラグランジアンの最終的な形を得る：

$$\mathscr{L} = - g_{ij^*} \partial_m A^i \, \partial^m A^{*j} - i g_{ij^*} \overline{\chi}^j \overline{\sigma}^m D_m \chi^i$$
$$+ \frac{1}{4} R_{ij^* k\ell^*} \chi^i \chi^k \overline{\chi}^j \overline{\chi}^\ell$$
$$- \frac{1}{2} D_i D_j P \chi^i \chi^j - \frac{1}{2} D_{i^*} D_{j^*} P^* \overline{\chi}^i \overline{\chi}^j$$
$$- g^{ij^*} D_i P D_{j^*} P^*. \tag{22.12}$$

ここで，

$$D_i P = \frac{\partial}{\partial A^i} P$$
$$D_i D_j P = \frac{\partial^2}{\partial A^i \, \partial A^j} P - \Gamma^k_{ij} \frac{\partial}{\partial A^k} P. \tag{22.13}$$

式 (22.12) は，カイラル多重項の最も一般的な超対称結合を記述する．われわれは，結果の幾何学的性質を例証するためにケーラー表記法を使った．ケーラー変換に対する不変性は明白である．

ラグランジアン (22.12) の各項はケーラー幾何学の言葉による自然な解釈ができる．スカラー場はケーラー多様体の座標，フェルミオンはその接空間のテンソルと考えられるべきである．ラグランジアン (22.12) は，幾何学的な形で表現されたシグマ模型の超対称版である．

超空間の表記法で，ケーラー幾何の出現は超場ケーラー変換

$$K(\Phi, \Phi^+) \to K(\Phi, \Phi^+) + F(\Phi) + F^+(\Phi^+) \tag{22.14}$$

のもとでのラグランジアン (22.1) の不変性にまでさかのぼることができる．この不変性は，今後，重要な役割を果たす．

文　献

B. Zumino, Phys. Lett. **87B**, 203 (1979).

D. Z. Freedman and L. Alvarez-Gaumé, Comm Math. Phys. **80**, 443 (1981).

重要な式

$$\mathscr{L} = \int d^2\theta\, d^2\overline{\theta}\, K(\Phi^i, \Phi^{+j}) + \left[\int d^2\theta\, P(\Phi^i) + \text{h.c.}\right] \tag{22.1}$$

$$\begin{aligned}\mathscr{L} = &-g_{ij^*}\partial_m A^i\,\partial^m A^{*j} - ig_{ij^*}\overline{\chi}^j\overline{\sigma}^m D_m\chi^i \\ &+ \frac{1}{4}R_{ij^*k\ell^*}\chi^i\chi^k\overline{\chi}^j\overline{\chi}^\ell \\ &- \frac{1}{2}D_iD_jP\chi^i\chi^j - \frac{1}{2}D_{i^*}D_{j^*}P^*\overline{\chi}^i\overline{\chi}^j \\ &- g^{ij^*}D_iPD_{j^*}P^*\end{aligned} \tag{22.12}$$

$$\begin{aligned}D_iP &= \frac{\partial}{\partial A^i}P \\ D_iD_jP &= \frac{\partial^2}{\partial A^i\,\partial A^j}P - \Gamma^k_{ij}\frac{\partial}{\partial A^k}P\end{aligned} \tag{22.13}$$

演　習

(1)　ラグランジアン (22.12) が次の超対称変換

$$\delta_\xi A^i = \sqrt{2}\,\xi\chi$$

$$\delta_\xi \chi^i = i\sqrt{2}\,\sigma^m \bar{\xi}\partial_m A^i - \Gamma^i_{jk}\delta_\xi A^j \chi^k - \sqrt{2}\,g^{ij^*}\frac{\partial P^*}{\partial A^{*j}}\xi$$

のもとで不変（全微分までで）であることを示せ．

(2)　$K = A^{*i}A^i$，$P^i = \lambda_i A^i + (1/2)m_{ij}A^i A^j + (1/3)g_{ijk}A^i A^j A^k$ とする．式 (22.12) が，式 (5.13) に与えられたくり込み可能なラグランジアンに帰着することを示せ．

23. 一般カイラル超重力模型

平坦空間でのケーラー幾何の役割を議論したので，今度はカイラル超場の超重力への最も一般的な結合を計算する．平坦空間においてと同様に，成分場ラグランジアンがケーラー幾何の言葉で自然に解釈されることをみる．

第 21 章の議論に動機付けされて，われわれは超空間ラグランジアンを

$$\mathscr{L} = \frac{1}{\kappa^2}\int d^2\Theta\, 2\mathscr{E}\left[\frac{3}{8}(\overline{\mathscr{D}}\,\overline{\mathscr{D}} - 8R)\exp\left\{-\frac{\kappa^2}{3}K(\Phi,\Phi^+)\right\} + \kappa^2 P(\Phi)\right] + \text{h.c.} \tag{23.1}$$

ととる．ここで，$K(\Phi,\Phi^+)$ は超場 Φ_i，Φ^{+j} のエルミート関数で，$P(\Phi)$ は超ポテンシャルである．自然対数関数形は式 (21.21) のもとの K と Ω の関係から示唆される．κ^2 で展開すると，K が平坦空間のケーラー・ポテンシャルであることがわかる．

$$\mathscr{L} = -\frac{6}{\kappa^2}\int d^2\Theta\,\mathscr{E}R + \int d^2\Theta\, 2\mathscr{E}\left[-\frac{1}{8}(\overline{\mathscr{D}}\,\overline{\mathscr{D}} - 8R)K(\Phi,\Phi^+) + P(\Phi)\right] + \cdots + \text{h.c.} \tag{23.2}$$

本章では，K が曲がった空間でも同様にケーラー・ポテンシャルであることをみる．

ラグランジアン (23.1) は，超重力変換に対して明確に不変である．その成分での形は，第 21 章で極小模型に対して導入された手法を用いて見つけられる．経緯は，実質的に同等で，K の一般的性質から来るほんの 2，3 個の余計な項がある．計算の終わりに，正確に式 (21.21) を発見する．そこでは，いまや，K は超場 $K(\Phi,\Phi^+)$ の最低次成分のスカラー場 A^i の任意の実関数である．

式 (21.21) が，K とその微分によって成分場ラグランジアンを与える．もし，ケーラー多様体の計量 g_{ij^*}，曲率 $R_{ij^*k\ell^*}$ を使えば，それはより簡潔に書き直される．この形では，ラグランジアンの幾何学的不変性は明白である．式 (C.10)，(C.18) と式

(21.21) を比較して，われわれは，

$$\begin{aligned}\mathscr{L} = &-\frac{1}{2}e\mathscr{R} - eg_{ij^*}\partial_m A^i \partial^m A^{*j}\\&- ieg_{ij^*}\overline{\chi}^j\overline{\sigma}^m\mathscr{D}_m\chi^i + e\varepsilon^{k\ell mn}\overline{\psi}_k\overline{\sigma}_\ell\tilde{\mathscr{D}}_m\psi_n\\&- \frac{1}{2}\sqrt{2}\,eg_{ij^*}\partial_n A^{*j}\chi^i\sigma^m\overline{\sigma}^n\psi_m - \frac{1}{2}\sqrt{2}\,eg_{ij^*}\partial_n A^i\overline{\chi}^j\overline{\sigma}^m\sigma^n\overline{\psi}_m\\&+ \frac{1}{4}eg_{ij^*}[i\varepsilon^{k\ell mn}\psi_k\sigma_\ell\overline{\psi}_m + \psi_m\sigma^n\overline{\psi}^m]\chi^i\sigma_n\overline{\chi}^j\\&- \frac{1}{8}e[g_{ij^*}g_{k\ell^*} - 2R_{ij^*k\ell^*}]\chi^i\chi^k\overline{\chi}^j\overline{\chi}^\ell\\&- e\exp(K/2)\Big\{P^*\psi_a\sigma^{ab}\psi_b + P\overline{\psi}_a\overline{\sigma}^{ab}\overline{\psi}_b\\&+ \frac{i}{2}\sqrt{2}\,D_iP\chi^i\sigma^a\overline{\psi}_a + \frac{i}{2}\sqrt{2}\,D_{i^*}P^*\overline{\chi}^i\overline{\sigma}^a\psi_a\\&+ \frac{1}{2}\mathscr{D}_iD_jP\chi^i\chi^j + \frac{1}{2}\mathscr{D}_{i^*}D_{j^*}P^*\overline{\chi}^i\overline{\chi}^j\Big\}\\&- e\exp(K)[g^{ij^*}(D_iP)(D_jP)^* - 3P^*P]\end{aligned} \tag{23.3}$$

を得る．共変微分は次で定義される．

$$\begin{aligned}\mathscr{D}_m\chi^i &= \partial_m\chi^i + \chi^i\omega_m + \Gamma^i_{jk}\partial_m A^j\chi^k - \frac{1}{4}(K_j\partial_m A^j - K_{j^*}\partial_m A^{*j})\chi^i\\\tilde{\mathscr{D}}_m\psi_n &= \partial_m\psi_n + \psi_n\omega_m + \frac{1}{4}(K_j\partial_m A^j - K_{j^*}\partial_m A^{*j})\psi_n\\D_iP &= P_i + K_iP\\\mathscr{D}_iD_jP &= P_{ij} + K_{ij}P + K_iD_jP + K_jD_iP - K_iK_jP - \Gamma^k_{ij}D_kP.\end{aligned} \tag{23.4}$$

共変微分は，ケーラー幾何のクリストッフェル記号と時空のスピン接続 (17.12) を含む．それらはまた，$\mathrm{Im}(K_j\partial_m A^j)$ に比例する U(1) 接続を含むことに注目せよ．U(1) 接続の意味は，進むにつれて明らかになる．ラグランジアン (23.3) は，超空間形式から導かれているので，重力変換に対して不変である．しかし，次の超重力変換：

$$\begin{aligned}\delta_\zeta e_m{}^a &= i(\zeta\sigma^a\overline{\psi}_m + \overline{\zeta}\,\overline{\sigma}^a\psi_m)\\\delta_\zeta A^i &= \sqrt{2}\,\zeta\chi^i\\\delta_\zeta\chi^i &= i\sqrt{2}\,\sigma^m\overline{\zeta}\hat{D}_m A^i - \Gamma^i_{jk}\delta_\zeta A^j\chi^k\\&\quad + \frac{1}{4}(K_j\delta_\zeta A^j - K_{j^*}\delta_\zeta A^{*j})\chi^i - \sqrt{2}\,e^{K/2}g^{ij^*}D_{j^*}P^*\zeta\end{aligned} \tag{23.5}$$

$$\delta_\zeta \psi_m = 2\mathscr{D}_m \zeta - \frac{1}{4}(K_j \delta_\zeta A^j - K_{j^*} \delta_\zeta A^{*j})\psi_m$$
$$- \frac{i}{2}\sigma_{mn}\zeta g_{ij^*}\chi^i \sigma^n \overline{\chi}^j + ie^{K/2} P \sigma_m \overline{\zeta}$$

を使って，不変性を直接に証明することは役に立つ．ここで，$\mathscr{D}_m\zeta$ は U(1) 接続

$$\mathscr{D}_m \zeta = \partial_m \zeta + \zeta \omega_m + \frac{1}{4}(K_j \partial_m A^j - K_{j^*} \partial_m A^{*j})\zeta \tag{23.6}$$

を含んでいる．場 χ^i の変換は，$\langle D_i P \rangle \neq 0$ であれば常に超対称性が自発的に破れていることを示している．この場合に，χ^i は定数だけシフトし，ゴールドストン・フェルミオンの役割をする．

ケーラー不変性を確かめるために，最初に成分場ラグランジアン (23.3) を調べる．ケーラー変換

$$K(A, A^*) \rightarrow K(A, A^*) + F(A) + F^*(A^*) \tag{23.7}$$

のもとで，計量（メトリック），クリストッフェル記号，曲率のすべてが不変である．U(1) 接続は不変でない：

$$\begin{aligned} \mathscr{D}_m \chi^i &\rightarrow \mathscr{D}_m \chi^i - \frac{i}{2}\,\partial_m(\mathrm{Im}\,F)\chi^i \\ \tilde{\mathscr{D}}_m \psi_n &\rightarrow \tilde{\mathscr{D}}_m \psi_n + \frac{i}{2}\,\partial_m(\mathrm{Im}\,F)\psi_n. \end{aligned} \tag{23.8}$$

もし，ケーラー変換がスピノル場のワイル回転

$$\begin{aligned} \chi^i &\rightarrow \exp +\frac{i}{2}(\mathrm{Im}\,F)\chi^i \\ \psi_n &\rightarrow \exp -\frac{i}{2}(\mathrm{Im}\,F)\psi_n \end{aligned} \tag{23.9}$$

を伴えば，ケーラー不変性が回復される．この規則で，式 (23.3) の運動項は，組み合わされたケーラー–ワイル（Kähler–Weyl）変換のもとで不変である．ケーラー–ワイル不変性は，ケーラー・ポテンシャル K のケーラー変換を引き起こすような場の再定義（等長変換の様な）のもとで運動項が不変であることを保証する．

成分ラグランジアンへの超ポテンシャルの寄与は K のあらわな因子を含むので，ケーラー–ワイル変換のもとでの不変性は自動的ではない．例えば，スカラーポテンシャル

$$\mathscr{V} = e^K[g^{ij^*}(D_i P)(D_j P)^* - 3P^* P] \tag{23.10}$$

が，もし

$$P \to e^{-F} P \tag{23.11}$$

としなければ，不変でないことも同様である．この選択で $D_i P$ は共変的に変換し，

$$D_i P \to e^{-F} D_i P. \tag{23.12}$$

そして，完全なラグランジアンは不変である．式 (23.11) は，超ポテンシャルの多項式構造を一般的に保たないことに留意せよ（第 21 章の演習 (7) 参照）．

数学的な言葉では，変換 (23.9) と (23.11) は，スピノルと超ポテンシャルが通常の関数ではなくて，むしろケーラー多様体上の適当な直線束（ラインバンドル）の断面（セクション）であることを意味している．もし，多様体が非自明（nontrivial）であれば，組み合わされたケーラー–ワイル不変性はラグランジアンが大域的にきちんと定義されるために必要である．局所的には，しかし，われわれは幾何学的な表記法を，超重力結合の最大の組を記述するのに役立つ便利な速記を与える，と単純に考えることができる．

物質結合のケーラー–ワイル不変性は超空間ラグランジアン (23.1) からもみることができる．いまや，しかし，超場ケーラー変換

$$K(\Phi, \Phi^+) \to K(\Phi, \Phi^+) + F(\Phi) + F^+(\Phi^+) \tag{23.13}$$

は，多脚場（vielbein）の超ワイル変換を伴わなければならない．

超ワイル変換は，捩率拘束 (14.25) と矛盾しない，多脚場の超場リスケーリング（rescaling）であると定義される．演習で，最も一般的なこの種の変換は

$$\begin{aligned} \delta E_M{}^a &= (\Sigma + \overline{\Sigma}) E_M{}^a \\ \delta E_M{}^\alpha &= (2\overline{\Sigma} - \Sigma) E_M{}^\alpha + \frac{i}{2} E_M{}^b (\varepsilon \sigma_b)^\alpha{}_{\dot\alpha} \overline{\mathscr{D}}^{\dot\alpha} \overline{\Sigma}, \end{aligned} \tag{23.14}$$

の形であることが示される．ここで，Σ と $\overline{\Sigma}$ はカイラル超場，

$$\mathscr{D}_\alpha \overline{\Sigma} = \overline{\mathscr{D}}_{\dot\alpha} \Sigma = 0 \tag{23.15}$$

である．これは，

$$\delta R = -2(2\Sigma - \overline{\Sigma}) R - \frac{1}{4} \overline{\mathscr{D}}_{\dot\alpha} \overline{\mathscr{D}}^{\dot\alpha} \overline{\Sigma}$$

$$\delta G_{\alpha\dot{\alpha}} = -(\Sigma + \overline{\Sigma})G_{\alpha\dot{\alpha}} + i\mathscr{D}_{\alpha\dot{\alpha}}(\overline{\Sigma} - \Sigma) \tag{23.16}$$

を意味する．変換 (23.14) と (23.16) は，超重力多重項の超ワイル変換を定義する．

物質場の超ワイル変換も Σ と $\overline{\Sigma}$ で媒介表示される．それらも適当な拘束を保持するように定義される．例えば，カイラル超場の超ワイル変換は，

$$\delta\Phi = w\Sigma\Phi \tag{23.17}$$

で与えられ，一方，エルミートのベクトル超場の変換は，ちょうど，

$$\delta V = w'(\Sigma + \overline{\Sigma})V \tag{23.18}$$

である．これらの表現で，w と w' は各超場のワイル重み (Weyl weight) とよばれる．

式 (23.14)～(23.18) が，いろいろな成分場のワイル重みを見つけることを可能にする．今度は逆に，これらを，新しい Θ 変数での超場の変分として書くことができる．少ない計算の後，

$$\begin{aligned}
\delta\mathscr{E} &= 6\Sigma\mathscr{E} + \frac{\partial}{\partial\Theta^\alpha}(S^\alpha\mathscr{E}) \\
\delta\Phi &= w\Sigma\Phi - S^\alpha\frac{\partial}{\partial\Theta^\alpha}\Phi \\
\delta(\overline{\mathscr{D}}\,\overline{\mathscr{D}} - 8R)U &= (\overline{\mathscr{D}}\,\overline{\mathscr{D}} - 8R)[(w'-4)\Sigma + (w'+2)\overline{\Sigma}]U \\
&\quad - S^\alpha\frac{\partial}{\partial\Theta^\alpha}(\overline{\mathscr{D}}\,\overline{\mathscr{D}} - 8R)U.
\end{aligned} \tag{23.19}$$

ここで，

$$S^\alpha = \Theta^\alpha(2\overline{\Sigma} - \Sigma)| + \Theta\Theta\mathscr{D}^\alpha\Sigma| \tag{23.20}$$

であり，U は重みが w' の任意のエルミート超場である．

変換 (23.19) は超空間ラグランジアンの変分を引き起こす．$w = 0$ に対してそれは

$$\delta\mathscr{L} = \int d^2\Theta\, 2\mathscr{E}\left[\frac{3}{4}(\overline{\mathscr{D}}\,\overline{\mathscr{D}} - 8R)(\Sigma + \overline{\Sigma})e^{-K/3} + 6\Sigma P\right] + \text{h.c.} \tag{23.21}$$

となる．これは，正確にケーラー変換

$$\delta\mathscr{L} = \int d^2\Theta\, 2\mathscr{E}\left[-\frac{1}{8}(\overline{\mathscr{D}}\,\overline{\mathscr{D}} - 8R)(F + F^*)e^{-K/3} - FP\right] + \text{h.c.} \tag{23.22}$$

である．ここで，式 (23.11) に従って P は $e^{-F}P$ とスケールされる．二つの変換を比較して，$F=6\Sigma$ であれば，式 (23.21) が式 (23.22) を相殺することがわかる．この選択により，超空間ラグランジアンは組み合されたケーラー–ワイル変換のもとで不変である．超空間ケーラー–ワイル変換が，成分場の局所ワイル変換 (23.9) を引き起こすことを示すのは有用な演習である．

ラグランジアン (23.1) の形を変えるために，任意の超ワイル変換を使える．特に，有限なパラメーター $-6\Sigma=\log P$ をもつ超ワイル変換は，リスケーリングにより超ポテンシャルを 1 にして，その成分表現を簡単にする．もちろん，期待値 $\langle P\rangle\neq 0$ の場合にかぎりこの変換が許される．これは無罪の仮定ではない．それは宇宙定数にゼロでない寄与を与える．この寄与は超対称性が自発的に破れているときにかぎり打ち消されうる．

$-6\Sigma=\log P$ をもつ変換は，ケーラー・ポテンシャル K を新しいポテンシャル $G=K+\log P+\log P^{+}$ に変える．これは，ケーラー変換なので，幾何は変わらない．したがって，新しいラグランジアンを見つけるためにわれわれは単純なおき換え，すなわち，P を 1 で，K を G で，D_iP を G_i で，$\mathscr{D}_iD_jP$ を $G_{ij}+G_iG_j-\Gamma^k_{ij}G_k$ で，というおき換えをする．これは，

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L} = &-\frac{1}{2}e\mathscr{R} - eg_{ij^*}\partial_m A^i\,\partial^m A^{*j} \\
&- ieg_{ij^*}\overline{\chi}^j\overline{\sigma}^m\mathscr{D}_m\chi^i + e\varepsilon^{k\ell mn}\overline{\psi}_k\overline{\sigma}_\ell\tilde{\mathscr{D}}_m\psi_n \\
&- \frac{1}{2}\sqrt{2}\,eg_{ij^*}\partial_n A^{*j}\chi^i\sigma^m\overline{\sigma}^n\psi_m - \frac{1}{2}\sqrt{2}\,eg_{ij^*}\partial_n A^i\overline{\chi}^j\overline{\sigma}^m\sigma^n\overline{\psi}_m \\
&+ \frac{1}{4}eg_{ij^*}[i\varepsilon^{k\ell mn}\psi_k\sigma_\ell\overline{\psi}_m + \psi_m\sigma^n\overline{\psi}^m]\chi^i\sigma_n\overline{\chi}^j \\
&- \frac{1}{8}e[g_{ij^*}g_{k\ell^*} - 2R_{ij^*k\ell^*}]\chi^i\chi^k\overline{\chi}^j\overline{\chi}^\ell \\
&- ee^{G/2}\Big\{\psi_a\sigma^{ab}\psi_b + \overline{\psi}_a\overline{\sigma}^{ab}\overline{\psi}_b \\
&+ \frac{i}{2}\sqrt{2}\,G_i\chi^i\sigma^a\overline{\psi}_a + \frac{i}{2}\sqrt{2}\,G_{i^*}\overline{\chi}^i\overline{\sigma}^a\psi_a \\
&+ \frac{1}{2}[G_{ij} + G_iG_j - \Gamma^k_{ij}G_k]\chi^i\chi^j \\
&+ \frac{1}{2}[G_{i^*j^*} + G_{i^*}G_{j^*} - \Gamma^{k^*}_{i^*j^*}G_{k^*}]\overline{\chi}^i\overline{\chi}^j\Big\} \\
&- ee^G[g^{ij^*}G_iG_{j^*} - 3]
\end{aligned}
\tag{23.23}
$$

を与える．

式 (23.23) の物理的内容を調べよう．われわれは，まず，運動項が，$g_{ij^*} = \delta_{ij^*} + \cdots$ であれば正しく規格化されることに気づく．われわれは，これが正しいことを，常に仮定する．次に，われわれが注目するのは，ポテンシャル

$$\mathscr{V} = e^G[g^{ij^*}G_iG_{j^*} - 3] \tag{23.24}$$

が，$\langle \partial\mathscr{V}/\partial A^i \rangle = 0$ ならば極値であること，そして，$\langle \mathscr{V} \rangle = 0$ ならば宇宙定数がゼロであることである．一緒に扱って，もし，

$$\begin{aligned} \langle G^iG_i \rangle &= 3 \\ \langle G^i\nabla_kG_i + G_k \rangle &= 0 \end{aligned} \tag{23.25}$$

ならば，これらの条件は満たされる．ここで $G^i = g^{ij^*}G_{j^*}$，$\nabla_kG_i = \partial_kG_i - \Gamma^j_{ki}G_j$，である．

スカラー質量行列は，$\mathscr{V}$ の 2 次の変分から見つかる．その形は

$$\begin{pmatrix} M^2_{ij^*} & M^2_{ij} \\ M^2_{i^*j^*} & M^2_{i^*j} \end{pmatrix}. \tag{23.26}$$

ただし，

$$\begin{aligned} M^2_{ij^*} &= \langle [\nabla_iG_k\nabla_{j^*}G^k - R_{ij^*k\ell^*}G^kG^{\ell^*} + g_{ij^*}]e^G \rangle \\ M^2_{ij} &= \langle [\nabla_iG_j + \nabla_jG_i]e^G \rangle \end{aligned} \tag{23.27}$$

である．ここで，われわれは式 (23.25) をくり返し使った．

スピノル質量行列も (23.23) から同様に求められる．2 次の項に焦点を合わせて

$$\begin{aligned} &-\langle e^{G/2} \rangle \Big\{ \psi_a\sigma^{ab}\psi_b + \overline{\psi}_a\overline{\sigma}^{ab}\overline{\psi}_b \\ &+ \frac{i}{2}\sqrt{2}\,\langle G_i \rangle \chi^i\sigma^a\overline{\psi}_a + \frac{i}{2}\sqrt{2}\,\langle G_{i^*} \rangle \overline{\chi}^i\overline{\sigma}^a\psi_a \\ &+ \frac{1}{2}\langle \nabla_iG_j + G_iG_j \rangle \chi^i\chi^j \\ &+ \frac{1}{2}\langle \nabla_{i^*}G_{j^*} + G_{i^*}G_{j^*} \rangle \overline{\chi}^i\overline{\chi}^j \Big\}. \end{aligned} \tag{23.28}$$

グラビティーノの質量は $\langle e^{G/2} \rangle$ であることが容易にわかる．

スピノル χ^i の質量は，グラビティーノ $\sigma_n \overline{\psi}_n$ とスピノル $G_i\chi^i$ の間の混合 (mixing) のためにもう少し微妙である．$\langle G_i \rangle \neq 0$ のときは，物理的な質量行列を見つけるために混合を取り除かなければならない．もちろん，場の再定義によって結合を対角化することは常に可能である．しかし，混合が重要な物理的な起源をもっていることを認識することは，より有益である．

これをみるために，場 $\eta = G_i\chi^i$ の超重力変換を考えるが，それは式 (23.5) に適当な代入をして与えられ，

$$\begin{aligned} \delta\eta &= -\sqrt{2}\, e^{G/2} G^i G_i \zeta + \cdots \\ &= -3\sqrt{2}\, m_\psi \zeta + \cdots . \end{aligned} \tag{23.29}$$

ここで，われわれは宇宙定数がゼロ，$\langle G^i G_i \rangle = 3$ である事実を使った．η が変換でシフトすることがわかる．これは η がゴールドストン・フェルミオンで，超対称性が自発的に破れていることを示している．正確に通常のゲージ理論と同様に，ゴールドストン・フェルミオンはヒグス効果の超対称版を通じてゲージ消去 (gauged away) される．この「ユニタリーゲージ」では，$G_i\chi^i$ に比例するすべての項は恒等的に消える．これが，グラビティーノ–ゴールドスティノ混合を取り除き，拘束 $G_i\chi^i = 0$ に従って，スピノル χ^i の質量行列を読みとることを可能にする．

もちろん，ゲージに依存しない方法（フェルミオン場の 2 次の項の対角化）でスピノル質量行列を見つけることができる．必要な場の再定義は上記の議論から示唆される．それは

$$\tilde{\psi}_n = \psi_n + \frac{1}{3}\sqrt{2}\, m_\psi^{-1}\, \partial_n \eta + \frac{i}{6}\sqrt{2}\, \sigma_n \overline{\eta} \tag{23.30}$$

である．この選択で，混合は消去されて質量項は対角的になり，

$$\begin{aligned} &- m_\psi \Big\{ \tilde{\psi}_a \sigma^{ab} \tilde{\psi}_b + \bar{\tilde{\psi}}_a \overline{\sigma}^{ab} \bar{\tilde{\psi}}_b \\ &+ \frac{1}{2} \langle \nabla_i G_j + \frac{1}{3} G_i G_j \rangle \chi^i \chi^j \\ &+ \frac{1}{2} \langle \nabla_{i^*} G_{j^*} + \frac{1}{3} G_{i^*} G_{j^*} \rangle \overline{\chi}^i \overline{\chi}^j \Big\}. \end{aligned} \tag{23.31}$$

スピノル質量行列はちょうど，

$$m_{ij} = \left\langle \nabla_i G_j + \frac{1}{3} G_i G_j \right\rangle m_\psi . \tag{23.32}$$

2 乗して，

$$m_{ij^*}^2 = g^{k\ell^*}\left\langle \nabla_i G_k + \frac{1}{3}G_i G_k\right\rangle\left\langle \nabla_{j^*} G_{\ell^*} + \frac{1}{3}G_{j^*} G_{\ell^*}\right\rangle m_\psi^2$$
$$= \left\langle \nabla_i G_k \nabla_{j^*} G^k - \frac{1}{3}G_i G_{j^*}\right\rangle m_\psi^2. \tag{23.33}$$

われわれは，いまや物理的場の質量和則を導けるところにいる．式 (23.26), (23.27), (23.33) から，n 個のスカラー場 A^i に対して

$$\begin{aligned}\mathrm{Str}\, M^2 &= \sum_{\text{スピン } J} (-1)^{2J}(2J+1)\,\mathrm{Tr}\, M^2 \\ &= \langle 2g^{ij^*} M_{ij^*}^2 - 2g^{ij^*} m_{ij^*}^2 - 4e^G\rangle \\ &= 2(n-1)m_\psi^2 - 2\langle R_{ij^*} G^i G^{j^*}\rangle m_\psi^2, \end{aligned} \tag{23.34}$$

を得る[1)]．質量和則から，ボソン–フェルミオン質量分離が m_ψ に比例することがわかる．宇宙定数がゼロのとき，グラビティーノ質量が超重力の自発的破れのための秩序変数（オーダーパラメーター）になる．

文　献

E. Cremmer, B. Julia, J. Scherk, S. Ferrara, L. Girardello, and P. van Nieuwenhuizen, Nucl. Phys. **B147**, 105 (1979)

E. Witten and J. Bagger, Phys. Lett. **115B**, 202 (1982).

重 要 な 式

$$\mathscr{L} = \frac{1}{\kappa^2}\int d^2\Theta\, 2\mathscr{E}\left[\frac{3}{8}(\overline{\mathscr{D}}\,\overline{\mathscr{D}} - 8R)\exp\left\{-\frac{\kappa^2}{3}K(\Phi,\Phi^+)\right\} + \kappa^2 P(\Phi)\right] + \text{h.c.} \tag{23.1}$$

$$\begin{aligned}\mathscr{L} = &-\frac{1}{2}e\mathscr{R} - eg_{ij^*}\partial_m A^i\,\partial^m A^{*j} \\ &- ieg_{ij^*}\overline{\chi}^j\overline{\sigma}^m\mathscr{D}_m\chi^i + e\varepsilon^{k\ell mn}\overline{\psi}_k\overline{\sigma}_\ell\tilde{\mathscr{D}}_m\psi_n \\ &- \frac{1}{2}\sqrt{2}\,eg_{ij^*}\partial_n A^{*j}\chi^i\sigma^m\overline{\sigma}^n\psi_m - \frac{1}{2}\sqrt{2}\,eg_{ij^*}\partial_n A^i\overline{\chi}^j\overline{\sigma}^m\sigma^n\overline{\psi}_m \\ &+ \frac{1}{4}eg_{ij^*}[i\varepsilon^{k\ell mn}\psi_k\sigma_\ell\overline{\psi}_m + \psi_m\sigma^n\overline{\psi}^m]\chi^i\sigma_n\overline{\chi}^j\end{aligned}$$

1)（訳注）Str は「超トレース」の略で，式 (23.34) で定義される．

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{8}e[g_{ij^*}g_{k\ell^*}-2R_{ij^*k\ell^*}]\chi^i\chi^k\overline{\chi}^j\overline{\chi}^\ell \\
&-e\exp(K/2)\Big\{P^*\psi_a\sigma^{ab}\psi_b+P\overline{\psi}_a\overline{\sigma}^{ab}\overline{\psi}_b \\
&+\frac{i}{2}\sqrt{2}\,D_iP\chi^i\sigma^a\overline{\psi}_a+\frac{i}{2}\sqrt{2}\,D_{i^*}P^*\overline{\chi}^i\overline{\sigma}^a\psi_a \\
&+\frac{1}{2}\mathscr{D}_iD_jP\chi^i\chi^j+\frac{1}{2}\mathscr{D}_{i^*}D_{j^*}P^*\overline{\chi}^i\overline{\chi}^j\Big\} \\
&-e\exp(K)[g^{ij^*}(D_iP)(D_jP)^*-3P^*P]
\end{aligned}
\tag{23.3}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathscr{D}_m\chi^i &= \partial_m\chi^i+\chi^i\omega_m+\Gamma^i_{jk}\partial_mA^j\chi^k-\frac{1}{4}(K_j\partial_mA^j-K_{j^*}\partial_mA^{*j})\chi^i \\
\tilde{\mathscr{D}}_m\psi_n &= \partial_m\psi_n+\psi_n\omega_m+\frac{1}{4}(K_j\partial_mA^j-K_{j^*}\partial_mA^{*j})\psi_n \\
D_iP &= P_i+K_iP \\
\mathscr{D}_iD_jP &= P_{ij}+K_{ij}P+K_iD_jP+K_jD_iP-K_iK_jP-\Gamma^k_{ij}D_kP
\end{aligned}
\tag{23.4}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta_\zeta e_m{}^a &= i(\zeta\sigma^a\overline{\psi}_m+\overline{\zeta}\,\overline{\sigma}^a\psi_m) \\
\delta_\zeta A^i &= \sqrt{2}\,\zeta\chi^i \\
\delta_\zeta\chi^i &= i\sqrt{2}\,\sigma^m\overline{\zeta}\hat{D}_mA^i-\Gamma^i_{jk}\delta_\zeta A^j\chi^k \\
&\quad+\frac{1}{4}(K_j\delta_\zeta A^j-K_{j^*}\delta_\zeta A^{*j})\chi^i-\sqrt{2}\,e^{K/2}g^{ij^*}D_{j^*}P^*\zeta \\
\delta_\zeta\psi_m &= 2\mathscr{D}_m\zeta-\frac{1}{4}(K_j\delta_\zeta A^j-K_{j^*}\delta_\zeta A^{*j})\psi_m \\
&\quad-\frac{i}{2}\sigma_{mn}\zeta g_{ij^*}\chi^i\sigma^n\overline{\chi}^j+ie^{K/2}P\sigma_m\overline{\zeta}
\end{aligned}
\tag{23.5}
$$

$$
\begin{aligned}
\chi^i &\to \exp+\frac{i}{2}(\operatorname{Im}F)\chi^i \\
\psi_n &\to \exp-\frac{i}{2}(\operatorname{Im}F)\psi_n
\end{aligned}
\tag{23.9}
$$

$$
\mathscr{V}=e^K[g^{ij^*}(D_iP)(D_jP)^*-3P^*P]
\tag{23.10}
$$

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Str}M^2 &= \sum_{\text{spins }J}(-1)^{2J}(2J+1)\operatorname{Tr}M^2 \\
&= 2(n-1)m_\psi^2-2\langle R_{ij^*}G^iG^{j^*}\rangle m_\psi^2
\end{aligned}
\tag{23.34}
$$

演　習

(1)　多脚場と接続の与えられた変分 $\delta E_M{}^A$ と $\delta\Phi_{MB}{}^A$ から，捩率 $T_{CB}{}^A$ の最も一般的な変分が

$$\begin{aligned}\delta T_{CB}{}^A = &\mathscr{D}_C H_B{}^A - (-)^{bc}\mathscr{D}_B H_C{}^A \\ &+ \Omega_{CB}{}^A - (-)^{bc}\Omega_{BC}{}^A \\ &+ T_{CB}{}^D H_D{}^A - H_C{}^D T_{DB}{}^A + (-)^{bc} H_B{}^D T_{DC}{}^A\end{aligned}$$

で与えられることを示せ．ここで，$H_A{}^B = E_A{}^M \delta E_M{}^B$，$\Omega_{CB}{}^A = E_C{}^M \delta\Phi_{MB}{}^A$．

(2)　演習 (1) の結果を使って，多脚場の最も一般的なワイル・リケーリング，すなわち，捩率拘束に矛盾しない，が式 (23.14) の形であることを示せ．

(3)　R と $G_{\alpha\dot\alpha}$ のワイル・リスケーリングを見つけ，それを式 (23.16) の結果と照合せよ．

(4)　条件 (23.35) は，スカラーポテンシャル (23.34) が宇宙定数がゼロのときに極値である，ことを意味していることを示せ．

(5)　スカラー質量行列 (23.27) を計算せよ．

(6)　無限小 η に対して，$\zeta = \eta\sqrt{2}/6m_\psi$ が η を 0 に変換することを示せ．

(7)　行列 (23.32) が，ゼロ固有値と G^i に比例する固有ベクトルをもつことを示せ．

(8)　質量和則 (23.34) を証明せよ．

(9)　極小カイラル模型に対して，Str $M^2 = 0$ を示せ．ここで，$G = -3\log(1 - A_i{}^* A_i/3)$．これは模型の重要な性質である．なぜならば，ほとんどの幅射補正が Str M^2 に比例するからである．

24. ゲージ不変模型

第 22 章で，われわれは平坦空間におけるカイラル超場の最も一般的な結合

$$\mathscr{L} = \int d^2\theta d^2\overline{\theta} K(\Phi^i, \Phi^{+j}) + \left[\int d^2\theta P(\Phi^i) + \text{h.c.}\right] \tag{24.1}$$

を学んだ．われわれは，K を，ケーラー多様体 $\mathscr{M}$ に対するケーラー・ポテンシャルとして自然に解釈できることを発見した．われわれはまた，作用 (24.1) がケーラー変換

$$K(\Phi^i, \Phi^{+j}) \to K(\Phi^i, \Phi^{+j}) + F(\Phi^i) + F^+(\Phi^{+j}) \tag{24.2}$$

のもとで不変であることに留意した．ここで，F は超場 Φ^i の解析関数である．本章ではケーラー幾何の解析的等長変換（analytic isometries）をゲージ化し，この方法で，ベクトル場を含むように式 (24.1) を一般化する．われわれは，$\mathscr{M}$ の解析的等長変換の各々のもとで，K がケーラー変換によって変換するという利点を使う．

ケーラー多様体の解析的等長変換は，正則なキリング・ベクトル，

$$\begin{aligned} X^{(b)} &= X^{i(b)}(a^j)\frac{\partial}{\partial a^i} \\ X^{*(b)} &= X^{*i(b)}(a^{*j})\frac{\partial}{\partial a^{*i}} \end{aligned} \tag{24.3}$$

によって生成される．ここで，添字 (b) は等長変換群 G の次元 d の上を走る．付録 D で示されるように，これはキリングの方程式が，

$$\begin{aligned} g_{ij*}X^{*j(a)} &= i\frac{\partial}{\partial a^i}D^{(a)} \\ g_{ij*}X^{i(a)} &= -i\frac{\partial}{\partial a^{*j}}D^{(a)} \end{aligned} \tag{24.4}$$

のような d 個の実スカラー関数 $D^{(a)}(a, a^*)$ が存在するという陳述に，帰着することを意味している．$D^{(a)}$ はキリング・ポテンシャルとして知られる．それらは，

$D^{(a)} \to D^{(a)} + c^{(a)}$ なる定数 $c^{(a)}$ までで定義される．後続の部分で，われわれは，ポテンシャルを再定義する自由度が第 8 章で導入されたファイエ–イリオポロス D 項に関係付けられることをみる．

キリング・ベクトル $X^{(a)}$ と $X^{*(a)}$ は等長変換群 G の独立な表現を生成する．それらは，リー括弧関係

$$
\begin{aligned}
[X^{(a)}, X^{(b)}] &= -f^{abc} X^{(c)} \\
[X^{*(a)}, X^{*(b)}] &= -f^{abc} X^{(c)} \\
[X^{(a)}, X^{*(b)}] &= 0
\end{aligned}
\tag{24.5}
$$

に従う．ここで，f^{abc} は G の構造定数である．付録 D で，キリング・ポテンシャル $D^{(a)}$ が随伴表現で，

$$
\left[X^{i(a)} \frac{\partial}{\partial a^i} + X^{*i(a)} \frac{\partial}{\partial a^{*i}} \right] D^{(b)} = -f^{abc} D^{(c)} \tag{24.6}
$$

のように変換するように選べることを示した．これが，ノンアーベリアン群に対して定数 $c^{(a)}$ を固定する．

G の等長変換のもと，K と P の変分はキリング・ベクトル $X^{(a)}$ で決められ，

$$
\begin{aligned}
\delta K &= [\varepsilon^{(a)} X^{(a)} + \varepsilon^{*a} X^{*(a)}] K \\
\delta P &= \varepsilon^{a} X^{(a)} P.
\end{aligned}
\tag{24.7}
$$

超ポテンシャルの変分は，作用が不変であるためには消えなければならない．しかし，ケーラー・ポテンシャルの変分は，消える必要がない．付録 D で示したように，それは次の形に直せる．

$$
\delta K = \varepsilon^{(a)} F^{(a)} + \varepsilon^{*(a)} F^{*(a)} - i(\varepsilon^{(a)} - \varepsilon^{*(a)}) D^{(a)}. \tag{24.8}
$$

ここで，$F^{(a)} = X^{(a)} K + i D^{(a)}$ は，座標の解析関数である．実の媒介変数 $\varepsilon^{(a)}$ に対して式 (24.8) はちょうどケーラー変換である．複素 $\varepsilon^{(a)}$ に対しては，それはケーラー型ではなく，K にはキリング・ポテンシャル $D^{(a)}$ に比例する変化がある．

式 (24.8) が，実の $\varepsilon^{(a)}$ に対してケーラー変換に帰着することは，作用 (24.1) が多様体 $\mathscr{M}$ の固い（大域的な）等長変換のもとで不変であることを示している．局所

的な運動（motion）に対しては，話はいっそう複雑になる．これは，パラメーター $\varepsilon^{(a)}$ が超空間でカイラル超場に比例しなければならないからである．この場合に，作用 (24.1) の変分は

$$\begin{aligned}\delta\mathscr{L} &= \int d^2\theta d^2\overline{\theta}\delta K \\ &= \int d^2\theta d^2\overline{\theta}[\Lambda^{(a)}F^{(a)} + \Lambda^{+(a)}F^{+(a)} - i(\Lambda^{(a)} - \Lambda^{+(a)})D^{(a)}] \\ &= -i\int d^2\theta d^2\overline{\theta}(\Lambda^{(a)} - \Lambda^{+(a)})D^{(a)}. \end{aligned} \tag{24.9}$$

ここで $\Lambda^{(a)}$ は最低次成分が $\varepsilon^{(a)}$ のカイラル超場，$D^{(a)}$ はカイラル超場 Φ^{i} と Φ^{+j} のエルミート関数である．

本章の残りの部分において，$\Lambda^{(a)}$ で媒介変数表示される（parametrized）等長変換のもとで不変な超対称ゲージ理論の構築法についてみていく．付録 E，F で展開された手法を使って，変分が正確に式 (24.9) を相殺する項を作用に加える．相殺項がベクトル超場 $V = V^{(a)}T^{(a)}$ を含むことがわかる．ここで $T^{(a)}$ は等長変換群 G のエルミート生成子である．

$\varepsilon^{(a)}$ は複素なので，われわれは G の複素化（$\mathscr{G}$ とよぶ）を研究しなければならない．$\mathscr{G}$ の任意の元 g は

$$g = e^{(i/2)v^{(a)}T^{(a)}}e^{-(i/2)u^{(a)}T^{(a)}} \tag{24.10}$$

の形に書ける．ここで，$u^{(a)}$，$v^{(a)}$ は実で，上で述べたように $T^{(a)}$ は等長変換群 G のエルミート生成子である．式 (24.10) は，g をエルミート行列とユニタリー行列の積に分離するが，これは常に実行可能である．

G の複素化 $\mathscr{G}$ が与えられると，元 g と $g' \in \mathscr{G}$（ある $u' \in G$ に対して $g = g'u'$ ならば）とを同一視して空間 $\mathscr{G}/G$ が構築される．このように，商空間（coset）の点は，

$$v = e^{(i/2)v^{(a)}T^{(a)}} \tag{24.11}$$

によって表現できる．行列 v は $\mathscr{G}$ の元で，$v^{(a)}$ は $\mathscr{G}/G$ の座標である．

群 $\mathscr{G}$ は，v への左積（*left* multiplication）$v' = g_0 v$ により，$\mathscr{G}/G$ に自然に作用する．v の変換を見つけるには二つの場合を調べるのが有益で，最初は $g_0 = u_0 \in G$，2 番目に $g_0 = v_0 \in \mathscr{G}$（$G$ の元ではない）の場合である．u_0 によって媒介変数表示

される変換に対して，

$$v \to u_0 v = u_0 v {u_0}^{-1} u_0 \equiv v' u'. \tag{24.12}$$

ここで，$v' = u_0 v {u_0}^{-1}$，$u' = u_0$ である．座標 $v^{(a)}$ を使うと，これが意味することは

$$e^{(1/2) v'^{(a)} T^{(a)}} = u_0 e^{(1/2) v^{(a)} T^{(a)}} {u_0}^{-1}. \tag{24.13}$$

そして元 $u_0 \in G$ のもとで，$v^{(a)}$ は線形に変換することがわかる．対照的に，変換 v_0 に対しては

$$v \to u_0 v \equiv v' u'. \tag{24.14}$$

エルミート共役をとると

$$v \to v v_0 \equiv u'^{\dagger} v'. \tag{24.15}$$

二つの表現を組み合わせて，

$$v'^2 = v_0 v^2 v_0. \tag{24.16}$$

座標 $v^{(a)}$ を使うと，これが意味することは

$$e^{v'^{(a)} T^{(a)}} = v_0 e^{v(a)} T^{(a)} v_0 \tag{24.17}$$

明確に非線形な変換則である．もし，$v_0 = e^{-(i/2) v(a) T(a)}$ をとれば，$v^{(a)}$ はゼロに変換される．

無限小の変分は，変換 (24.13) と (24.17) を組み合わせて，

$$\begin{aligned} \delta \exp(v^{(a)} T^{(a)}) &= -\frac{i}{2} [{u_0}^{(b)} + i {v_0}^{(b)}] T^{(b)} \exp(v^{(a)} T^{(a)}) \\ &\quad + \frac{i}{2} \exp(v^{(a)} T^{(a)}) [{u_0}^{(b)} - i {v_0}^{(b)}] T^{(b)} \\ &= -i \varepsilon^* e^{v'^{(a)} T^{(a)}} - i e^{v'^{(a)} T^{(a)}} \varepsilon. \end{aligned} \tag{24.18}$$

ここで，$\varepsilon = \varepsilon^{(b)} T^{(b)}$，$\varepsilon^{(b)} = (1/2)(u_0^{(b)} - i v_0^{(b)})$ とした．もし，$\varepsilon^{(b)}$ をカイラル超場 $\Lambda^{(b)}$ の最低次成分，$v^{(a)}$ をベクトル超場 $V^{(a)}$ の最低次成分と同一視すれば，変換 (24.18) が正確にゲージ変換 (7.15)：

$$\delta e^V = -i \Lambda^+ e^V + i e^V \Lambda \tag{24.19}$$

の最低次成分であることがわかる．

式 (24.13) と式 (24.17) を，式 (E.17) と式 (E.23) と比べると，ベクトル超場の変換則はちょうど，商空間 $\mathscr{G}/G$ に対応する非線形表現になっている．付録 F のように，完全にゲージ不変な理論を構築するのにはこの事実を利用する．以前に，

$$\delta\mathscr{L} = -i\int d^2\theta d^2\overline{\theta}(\Lambda^{(a)} - \Lambda^{+(a)})D^{(a)} \tag{24.20}$$

を発見したことを思い出せ．この変分を打ち消すために，

$$\delta\Gamma = i[\Lambda^{(a)} - \Lambda^{+(a)}]D^{(a)} \tag{24.21}$$

であるような関数 $\Gamma(\Phi^i, \Phi^{+j}, V^{(a)})$ を見つけることが必要である．このとき，

$$\begin{aligned}\mathscr{L} = &\int d^2\theta d^2\overline{\theta}[K(\Phi^i, \Phi^{+j}) + \Gamma(\Phi^i, \Phi^{+j}, V^{(a)})] \\ &+ \left[\int d^2\theta P(\Phi^i) + \text{h.c.}\right]\end{aligned} \tag{24.22}$$

は完全にゲージ不変な作用である．

相殺項 Γ を発見するために，その最低次成分 $\Gamma(a^i, a^{j*}, v^{(a)})$ を制限する．それから，変分 $\delta\Gamma$ を微分演算子で書くと，

$$\begin{aligned}\delta\Gamma &= \varepsilon^{(a)}X^{(a)}\Gamma + \varepsilon^{*(a)}X^{*(a)}\Gamma + \delta v^{(a)}\frac{\delta\Gamma}{\delta v^{(a)}} \\ &\equiv \frac{1}{2}(\varepsilon^{(a)} + \varepsilon^{*(a)})\mathscr{P}^{(a)}\Gamma + \frac{1}{2}(\varepsilon^{(a)} - \varepsilon^{*(a)})\mathscr{O}^{(a)}\Gamma.\end{aligned} \tag{24.23}$$

ここで，$\mathscr{P}^{(a)}$，$\mathscr{O}^{(a)}$ は，$v^{(a)}$ の適当な変分同様に，座標 a^i, a^{*j} の変分を含む．式 (24.23) が式 (24.21) に一致するために，われわれは，

$$\begin{aligned}\mathscr{P}^{(a)}\Gamma &= 0 \\ \mathscr{O}^{(a)}\Gamma &= 2iD^{(a)}\end{aligned} \tag{24.24}$$

を要請しなければならない．さらに，Γ が境界条件

$$\Gamma(a^i, a^{*j}, 0) = 0 \tag{24.25}$$

を満たすことを要請する．

これらの要素で，式 (24.24) を積分することは難しくない．付録 F の手続きに従って，

$$\begin{aligned}\Gamma &= \frac{e^{(i/2)v^{(a)}O^{(a)}}-1}{(1/2)v^{(b)}O^{(b)}}v^{(c)}D^{(c)} \\ &= \int_0^1 d\alpha e^{(i/2)\alpha v^{(a)}O^{(a)}}v^{(c)}D^{(c)}\end{aligned} \quad \textbf{(24.26)}$$

を得る．この表示で，演算子 $O^{(a)}$ は $\mathcal{O}^{(a)}$ と同じであるが，$v^{(a)}$ の変分は含まない．

$$O^{(a)} = X^{(a)} - X^{*(a)}. \quad \textbf{(24.27)}$$

Γ が実際に式 (24.24) に従うことを調べるのは，有益な演習である．

相殺項 Γ を見つけたので，超空間でゲージ不変な作用を書く準備ができている．最初に，Γ を超場に昇格させる，それには，a^i，a^{*j}，$v^{(a)}$ を，超場 Φ^i，Φ^{+j}，$V^{(a)}$ でおき換える．象徴的な表記で，

$$\Gamma(\Phi^i, \Phi^{+j}, V^{(a)}) = \int_0^1 d\alpha e^{(1/2)\alpha V^{(a)}O^{(a)}}V^{(b)}D^{(b)}. \quad (24.28)$$

ここで，微分 $O^{(a)}$ は，場が超場でおき換えられる**前**（*before*）に実行される．この表現を式 (24.22) に代入して超空間で完全にゲージ不変なラグランジアン

$$\begin{aligned}\mathscr{L} = &\int d^2\theta d^2\overline{\theta} K(\Phi^i, \Phi^{+j}) + \int_0^1 d\alpha \int d^2\theta d^2\overline{\theta} e^{(i/2)\alpha V^{(a)}O^{(a)}}V^{(b)}D^{(b)} \\ &+ \left[\int d^2\theta P(\Phi^i) + \text{h.c.}\right]\end{aligned} \quad \textbf{(24.29)}$$

を得る．

作用 (24.29) は，それが超空間形で書かれているため，明白に超対称的である．構成の仕方から，それはまた，G の中の局所等長変換

$$\begin{aligned}\delta\Phi^i &= \Lambda^{(a)}X^{i(a)}(\Phi^j) \\ \delta e^V &= -i\Lambda^{+(a)}T^{(a)}e^V + ie^V\Lambda^{(a)}T^{(a)}\end{aligned} \quad \textbf{(24.30)}$$

のもとで不変である．式 (24.29) 中にキリング・ポテンシャルがあらわに現れることは，キリング・ベクトルの大域的存在が等長変換群 G のゲージ化に必要であることを意味している，ということに留意せよ．

成分でこの作用を書くために，ベクトル多重項に対する運動項を加える．

$$\mathscr{L} = \frac{1}{16kg^2}\int d^2\theta \mathrm{Tr} WW + \mathrm{h.c.} \tag{24.31}$$

そして，その後，WZ ゲージへ進む．補助場を消去し残っている項を幾何学的な形に直すのは一直線的な演習である．その結果，

$$\begin{aligned}\mathscr{L} = &-g_{ij*}\mathscr{D}_m A^i \mathscr{D}^m A^{*j} - i\lambda^{(a)}\sigma^m \mathscr{D}_m \overline{\lambda}^{(a)} - \frac{1}{2}g^2 D^{(a)2}\\ &-ig_{ij*}\chi^i\sigma^m\mathscr{D}_m\overline{\chi}^j - \frac{1}{4}F_{mn}{}^{(a)}F^{mn(a)}\\ &+g\sqrt{2}g_{ij*}[X^{i(a)}\overline{\chi}^j\overline{\lambda}^{(a)} + X^{*j(a)}\chi^i\lambda^{(a)}]\\ &-\frac{1}{2}D_iD_jP\chi^i\chi^j - \frac{1}{2}D_{i*}D_{j*}P^*\overline{\chi}^i\overline{\chi}^j\\ &-g^{ij*}D_iPD_{j*}P^* + \frac{1}{4}R_{ij*k\ell*}\chi^i\chi^k\overline{\chi}^j\overline{\chi}^\ell.\end{aligned} \tag{24.32}$$

ここで，

$$\begin{aligned}\mathscr{D}_m A^i &= \partial_m A^i - gv_m{}^{(a)}X^{i(a)}\\ \mathscr{D}_m\chi^i &= \partial_m\chi^i + \Gamma^i{}_{jk}\mathscr{D}_m A^j\chi^k - gv_m{}^{(a)}\frac{\partial X^{i(a)}}{\partial A^j}\chi^j\\ \mathscr{D}_m\lambda^{(a)} &= \partial_m\lambda^{(a)} - gf^{abc}v_m{}^{(b)}\lambda^{(c)}\\ D_iP &= \frac{\partial P}{\partial A^i}\\ D_iD_jP &= \frac{\partial^2 P}{\partial A^i\partial A^j} - \Gamma^k_{ij}\frac{\partial P}{\partial A^k}\end{aligned} \tag{24.33}$$

であり，リスケーリング $V \to 2gV$ を行った．作用 (24.32) は次のゲージ変換：

$$\begin{aligned}\delta A^i &= \varepsilon^{(a)}X^{i(a)}\\ \delta\chi^i &= \varepsilon^{(a)}\frac{\partial X^{i(a)}}{\partial A^j}\chi^j\\ \delta\lambda^{(a)} &= f^{abc}\varepsilon^{(b)}\lambda^{(c)}\\ \delta v_m{}^{(a)} &= g^{-1}\partial_m\varepsilon^{(a)} + f^{abc}\varepsilon^{(b)}v_m{}^{(c)}\end{aligned} \tag{24.34}$$

のもとで不変である．共変微分 (24.33) は，変換 (24.34) から明らかなように，完全にゲージ共変的である．

ラグランジアン (24.32) は，次のスカラーポテンシャル

$$\mathscr{V} = \frac{1}{2}g^2 D^{(a)2} + g^{ij*} D_i P D_{j*} P^* \qquad \textbf{(24.35)}$$

を含んでいる．第 1 項は，第 7 章で導入した "D 項" のシグマ模型一般化である．式 (24.35) は，もし，a，または，i のある値に対して $\langle D^{(a)}\rangle \neq 0$ または $\langle D_i P\rangle \neq 0$ ならば，超対称性が自発的に破れていることを意味している．

ゲージ群 G の U(1) 因子に対して，関係式 (24.4) と式 (24.6) はキリング・ポテンシャルを完全には決めない．それらは，D 項に加算的定数 c の任意性

$$D \to D + c \qquad (24.36)$$

を残す．したがって，定数を適切に選ぶことにより超対称性が自発的に破れるように調整することが常に可能である．これは超対称性の破れに対するファイエ–イリオポロス機構のシグマ模型版である．

上に展開された形式の一般性を例示するために，二つの例で本章をまとめる．われわれは，最初に C^a を考え，原点のまわりに U(n) 回転をゲージ化する．われわれは，$K = a^{*i}a^i + d$，$g_{ij*} = \delta_{ij*}$，$R_{ij*k\ell*} = 0$ をとる．キリング・ベクトル $X^{i(a)}$ は $-iT^{(a)i}{}_j a^j$，キリング・ポテンシャルは $D^{(a)} = a^{*i}T^{(a)i}{}_j a^j$ である．a^i と a^{*j} を超場 Φ^i と Φ^{+j} に昇格させて，

$$\Gamma(\Phi^i, \Phi^{+j}, V^{(a)}) = \int d^2\theta d^2\overline{\theta}\Phi^+(e^V - 1)\Phi \qquad (24.37)$$

を得る．この結果を使って式 (24.29) が U(n) ゲージ理論の超空間ラグランジアンに帰着することは明らかである．

2 番目の例として，$CP^1 = S^2 = \mathrm{SU}(2)/\mathrm{U}(1)$ を考える．これは等質空間（homogeneous space）でありケーラー多様体でもある．簡単のために，射影座標 a と a^* を使う．この座標で，$K = \log(1 + aa^*), P = 0$ とする（付録 D 演習 (6) 参照）．われわれは，等長変換群 $G = \mathrm{SU}(2)$ 全体（full）をゲージ化するので，関数 $D^{(a)}$ は次のようになる．

$$D^{(1)} = \frac{1}{2}\frac{a + a^*}{(1 + a^*a)}, \quad D^{(2)} = -\frac{i}{2}\frac{a - a^*}{(1 + a^*a)}, \quad D^{(3)} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1 - a^*a}{1 + a^*a}\right). \qquad (24.38)$$

ここから，ラグランジアンを超空間で，成分で計算することができる．われわれは，ラグランジアン (24.32) から出発して，成分で計算する．SU(2) 全体をゲージ化した

ので，ユニタリゲージ $a=a^*=0$ がとれる．このゲージが理論の粒子内容を示す．

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{4}F_{mn}{}^{(a)}F^{mn(a)}-i\lambda^{(a)}\sigma^m\mathscr{D}_m\overline{\lambda}^{(a)}-i\chi\sigma^m\mathscr{D}_m\overline{\chi}$$
$$-\frac{1}{2}g^2v_m{}^+v^{-m}-\frac{1}{8}g^2-ig(\chi\lambda_- -\overline{\chi}\overline{\lambda}_-)-\frac{1}{2}\chi\chi\overline{\chi}\,\overline{\chi}. \quad (24.39)$$

ここで，

$$v_m{}^\pm=\frac{1}{2}\sqrt{2}(v_m{}^{(1)}\pm iv_m{}^{(2)})$$
$$\lambda_\pm=\frac{1}{2}\sqrt{2}(\lambda^{(1)}\pm i\lambda^{(2)}) \quad (24.40)$$
$$\mathscr{D}_m\chi=\partial_m\chi-igv_m{}^{(3)}\chi$$

である．SU(2) 対称性は，$D^{(a)2}$ が定数であることを意味している．定数は正なので，超対称性は自発的に破れている．質量スペクトルは次の通りである．荷電ベクトル中間子 $v_m^\pm$ は有質量：それらはスカラー a と a^* を食べた，ゼロ質量ベクトル中間子 $v_m^{(3)}$ は破れていない U(1) 対称性に対応するゲージ場である．その超対称対粒子（SUSY partner）は中性のゼロ質量のゴールドストン・スピノル $\lambda^{(3)}$ である．マジョラナ・スピノル χ，λ_- は質量をもち，組み合わされて 1 個の質量をもつディラック・スピノルになる．最後に，λ_+ は質量をもつ荷電スピノルである．CP^1 模型は，自発的に破れた超対称性をもち，食べ残しヒグス粒子はなく，破れていないゲージ対称性の複素表現の 1 個のゼロ質量ワイル・スピノルをもっている．この模型が注目に値するのは，粒子スピンが（それらの質量と同様に）超対称性を破っていることである．超対称性が破れていない模型は同じスピンスペクトルをもたない．それにもかかわらず，ボソンとフェルミオンの自由度の数は質量殻上で等しいのである．

文　　献

J. Bagger and E. Witten, Phys. Lett. **118B**, 103 (1982).
C M. Hull, A. Karlhede, U. Lindstrom, and M. Rŏcek, Nucl. Phys. **266**, 1 (1986).

重要な式

$$
\begin{aligned}
g_{ij*}X^{*j(a)} &= i\frac{\partial}{\partial a^i}D^{(a)} \\
g_{ij*}X^{i(a)} &= -i\frac{\partial}{\partial a^{*j}}D^{(a)}
\end{aligned}
\tag{24.4}
$$

$$
\begin{aligned}
[X^{(a)}, X^{(b)}] &= -f^{abc}X^{(c)} \\
[X^{*(a)}, X^{*(b)}] &= -f^{abc}X^{(c)} \\
[X^{(a)}, X^{*(b)}] &= 0
\end{aligned}
\tag{24.5}
$$

$$
\left[X^{i(a)}\frac{\partial}{\partial a^i} + X^{*i(a)}\frac{\partial}{\partial a^{*i}}\right]D^{(b)} = -f^{abc}D^{(c)} \tag{24.6}
$$

$$
\delta K = \varepsilon^{(a)}F^{(a)} + \varepsilon^{*(a)}F^{*(a)} - i(\varepsilon^{(a)} - \varepsilon^{*(a)})D^{(a)} \tag{24.8}
$$

$$
e^{(1/2)v'^{(a)}T^{(a)}} = u_0 e^{(1/2)v^{(a)}T^{(a)}}u_0{}^{-1} \tag{24.13}
$$

$$
e^{v'^{(a)}T^{(a)}} = v_0 e^{v^{(a)}T^{(a)}}v_0 \tag{24.17}
$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma &= \frac{e^{(i/2)v^{(a)}O^{(a)}} - 1}{(1/2)v^{(b)}O^{(b)}}v^{(c)}D^{(c)} \\
&= \int_0^1 d\alpha e^{(i/2)\alpha v^{(a)}O^{(a)}}v^{(c)}D^{(c)}
\end{aligned}
\tag{24.26}
$$

$$
O^{(a)} = X^{(a)} - X^{*(a)} \tag{24.27}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L} = &\int d^2\theta d^2\bar{\theta}K(\Phi^i, \Phi^{+j}) + \int_0^1 d\alpha \int d^2\theta d^2\bar{\theta} e^{(i/2)\alpha V^{(a)}O^{(a)}}V^{(b)}D^{(b)} \\
&+ \left[\int d^2\theta P(\Phi^i) + \text{h.c.}\right]
\end{aligned}
\tag{24.29}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta\Phi^i &= \Lambda^{(a)}X^{i(a)}(\Phi^j) \\
\delta e^V &= -i\Lambda^{+(a)}T^{(a)}e^V + ie^V\Lambda^{(a)}T^{(a)}
\end{aligned}
\tag{24.30}
$$

$$
\mathscr{L} = -g_{ij*}\mathscr{D}_m A^i \mathscr{D}^m A^{*j} - i\lambda^{(a)}\sigma^m \mathscr{D}_m \bar{\lambda}^{(a)} - \frac{1}{2}g^2 D^{(a)2}
$$

$$
\begin{aligned}
&-ig_{ij*}\chi^i\sigma^m\mathscr{D}_m\overline{\chi}^j - \frac{1}{4}F_{mn}{}^{(a)}F^{mn(a)} \\
&+g\sqrt{2}g_{ij*}[X^{i(a)}\overline{\chi}^j\overline{\lambda}^{(a)} + X^{*j(a)}\chi^i\lambda^{(a)}] \\
&-\frac{1}{2}D_iD_jP\chi^i\chi^j - \frac{1}{2}D_{i*}D_{j*}P^*\overline{\chi}^i\overline{\chi}^j \\
&-g^{ij*}D_iPD_{j*}P^* + \frac{1}{4}R_{ij*k\ell*}\chi^i\chi^k\overline{\chi}^j\overline{\chi}^\ell
\end{aligned} \tag{24.32}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathscr{D}_mA^i &= \partial_mA^i - gv_m{}^{(a)}X^{i(a)} \\
\mathscr{D}_m\chi^i &= \partial_m\chi^i + \Gamma^i{}_{jk}\mathscr{D}_mA^j\chi^k - gv_m{}^{(a)}\frac{\partial X^{i(a)}}{\partial A^j}\chi^j \\
\mathscr{D}_m\lambda^{(a)} &= \partial_m\lambda^{(a)} - gf^{abc}v_m{}^{(b)}\lambda^{(c)} \\
D_iP &= \frac{\partial P}{\partial A^i} \\
D_iD_jP &= \frac{\partial^2 P}{\partial A^i\partial A^j} - \Gamma^k_{ij}\frac{\partial P}{\partial A^k}
\end{aligned} \tag{24.33}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta A^i &= \varepsilon^{(a)}X^{i(a)} \\
\delta\chi^i &= \varepsilon^{(a)}\frac{\partial X^{i(a)}}{\partial A^j}\chi^j \\
\delta\lambda^{(a)} &= f^{abc}\varepsilon^{(b)}\lambda^{(c)} \\
\delta v_m{}^{(a)} &= g^{-1}\partial_m\varepsilon^{(a)} + f^{abc}\varepsilon^{(b)}v_m{}^{(c)}
\end{aligned} \tag{24.34}
$$

$$
\mathscr{V} = \frac{1}{2}g^2D^{(a)2} + g^{ij*}D_iPD_{j*}P^* \tag{24.35}
$$

演　　習

(1)　キリング・ポテンシャルが，式 (24.6) を満たすように常に選ぶことが可能であることを示せ．これは左辺を a^i で微分してから式 (24.6) の右辺の a^i 微分を得るために，上で導入された関係を使う．証明は，a^{*i} の微分について手続きをくり返すことで完成する．

(2)
$$
X^{i(a)}\frac{\partial}{\partial a^i}D^{(b)} + X^{*i(b)}\frac{\partial}{\partial a^{*i}}D^{(a)} = 0
$$
を示せ．

(3)　微分演算子

$$X^{(a)} = -ia^j T^{(a)k}{}_j \frac{\partial}{\partial a^k}$$
$$X^{*(a)} = ia^{*j} T^{(a)j}{}_k \frac{\partial}{\partial a^{*k}}$$

が，実際にキリング・ベクトルであることを示せ．ここで，$T^{(a)}{}_j{}^k$ は式 (7.14) で与えられる．それらのリー括弧式は式 (24.5) で閉じることを示せ．

(4)　$\mathscr{M}$ を複素平面とする．この演習では $\mathscr{M}$ 上の y 方向の変位をゲージ化する（x 方向への変位もゲージ化できるが，式 (24.6) のために，両方同時には不可能であることに留意せよ）．上記のように，$K = a^*a + d$，$g_{aa^*} = 1$，$R_{aa^*aa^*} = 0$ とせよ．D について $D = m(a + a^*)$ とせよ．ラグランジアンと質量スペクトルをユニタリゲージで求めよ．

(5)　WZ ゲージで，式 (24.29) が，式 (24.32) に帰着することを示せ．

25.　ゲージ不変超重力模型

超対称性理論の幾何学的解釈を議論したので，物質場と超重力の一般的な結合を書き下す準備ができた．われわれが導くラグランジアンは，超重力理論の現象論的研究の出発点である．われわれは，超空間 (25.1) において，2 成分スピノル表記 (25.12) を使ってラグランジアンを提示するが，読者への奉仕として，より便宜的な 4 成分スピノル表記 (25.24) も同様に提示する．結果のみに関心のある読者は，章の関連箇所に跳んでよい．

ゲージ不変な超空間ラグランジアンの超重力拡張を見つけることは，以前の章の内容を用いれば容易である．式 (24.17) のように，最初に，ケーラー・ポテンシャル K に相殺項 Γ を加える．次に，その結果を式 (23.1) のように指数関数化（exponentiate）すると，

$$\mathscr{L} = \int d^2\Theta\, 2\mathscr{E}\left[\frac{3}{8}(\overline{\mathscr{D}}\,\overline{\mathscr{D}} - 8R)\exp\left\{-\frac{1}{3}\Big[K(\Phi,\Phi^+) + \Gamma(\Phi,\Phi^+,V)\Big]\right\} + \frac{1}{16g^2}H_{(ab)}(\Phi)W^{(a)}W^{(b)} + P(\Phi)\right] + \text{h.c.} \qquad \textbf{(25.1)}$$

ここで $\kappa^2 = 1$，そして

$$W_\alpha \equiv W_\alpha^{(a)}T^{(a)} = -\frac{1}{4}(\overline{\mathscr{D}}\,\overline{\mathscr{D}} - 8R)e^{-V}\mathscr{D}_\alpha e^V \qquad \textbf{(25.2)}$$

は，超対称ヤン–ミルズ場の強さ（Yan–Mills Field strength）の曲がった空間への一般化である．K は超場 Φ^i，Φ^{+j} の任意のエルミート関数であり，P は超ポテンシャル，Γ は相殺項 (24.22) で，以下でみるように，ゲージ不変性のために必要である．解析関数 $H_{(ab)}$ は一般性のために含めた．ゲージ変換のもとで，それは，式 (25.1) を不変にするように変換しなければならない．以下の議論では，$H_{(ab)} = \delta_{ab}$ とする．非自明な $H_{(ab)}$ は，付録 G に示した．

式 (25.1) の超重力不変性は，超空間形式（superspace formalism）のために明白

である．ゲージ不変性はもう少し微妙である．それを調べるために，K，Γ，P のゲージ変換を思い出すと，第 24 章で与えられたように，

$$\begin{aligned} \delta K &= \Lambda^{(a)}F^{(a)} + \Lambda^{+(a)}F^{+(a)} - i[\Lambda^{(a)} - \Lambda^{+(a)}]D^{(a)} \\ \delta\Gamma &= i[\Lambda^{(a)} - \Lambda^{+(a)}]D^{(a)} \\ \delta P &= \Lambda^{(a)}X^{(a)}P. \end{aligned} \tag{25.3}$$

ここで，

$$F^{(a)} = X^{(a)}K + iD^{(a)} \tag{25.4}$$

は Φ^i の解析関数であり，$\Lambda^{(a)}$ は超場ゲージ媒介変数である．ラグランジアン (25.1) に変換 (25.3) を用いると，次の形の変分：

$$\begin{aligned} \delta\mathscr{L} = \int d^2\Theta\, 2\mathscr{E}\bigg[&-\frac{1}{8}(\overline{\mathscr{D}}\,\overline{\mathscr{D}} - 8R)[\Lambda^{(a)}F^{(a)} + \Lambda^{+(a)}F^{+(a)}]e^{-(K+\Gamma)/3} \\ &+ \Lambda^{(a)}X^{(a)}P\bigg] + \text{h.c.} \end{aligned} \tag{25.5}$$

を引き起こす．第 23 章で，この種の変分は超ワイル変換で打ち消され，そこでは，Φ^i のワイル重みはゼロに選ばれた．$V^{(a)}$ の重みも同じくゼロとおくと，超場媒介変数 Σ の超ワイル変換のもとで

$$\delta\mathscr{L} = \int d^2\Theta\, 2\mathscr{E}\left[\frac{3}{4}(\overline{\mathscr{D}}\,\overline{\mathscr{D}} - 8R)[\Sigma + \overline{\Sigma}]e^{-(K+\Gamma)/3} + 6\Sigma P\right] + \text{h.c.} \tag{25.6}$$

を得る．式 (25.5) と式 (25.6) を比較して，もしも

$$\begin{aligned} \Sigma &= \frac{1}{6}\Lambda^{(a)}F^{(a)} \\ \delta P &= \Lambda^{(a)}X^{(a)}P = -\Lambda^{(a)}F^{(a)}P \end{aligned} \tag{25.7}$$

であれば変分を打ち消すことがわかる．条件 δP は理論のゲージ不変性のために必要な超場に対する非自明な条件である．

上に示された超空間ラグランジアンは，前章で展開された手法を用いて，成分で表現することができる．最初に，WZ ゲージに移ると，そこでは，

$$\Gamma = V^{(a)}D^{(a)} + \frac{1}{2}g_{ij^*}X^{i(a)}X^{*j(b)}V^{(a)}V^{(b)}. \tag{25.8}$$

そして

$$W_\alpha = -\frac{1}{4}(\overline{\mathscr{D}}\,\overline{\mathscr{D}} - 8R)\left\{\mathscr{D}_\alpha V - \frac{1}{2}[V, \mathscr{D}_\alpha V]\right\} \tag{25.9}$$

となる．次に，

$$(\overline{\mathscr{D}}\,\overline{\mathscr{D}} - 8R)\exp\left\{-\frac{1}{3}[K + \Gamma]\right\} \tag{25.10}$$

と

$$W^{(a)}W^{(a)} \tag{25.11}$$

に対して Θ 展開を計算する．補助場を消去し，その他の場には，第 21，23 章のようにリスケーリング，再定義を行って，物理的場による成分ラグランジアンを得る．このラグランジアン：

$$\begin{aligned}
\mathscr{L} = &-\frac{1}{2}e\mathscr{R} - eg_{ij^*}\tilde{\mathscr{D}}_m A^i \tilde{\mathscr{D}}^m A^{*j} - \frac{1}{2}eg^2 D^{(a)2} \\
&-\frac{1}{4}eF_{mn}{}^{(a)}F^{mn(a)} - ie\overline{\lambda}^{(a)}\overline{\sigma}^m \tilde{\mathscr{D}}_m \lambda^{(a)} \\
&-ieg_{ij^*}\overline{\chi}^j\overline{\sigma}^m\tilde{\mathscr{D}}_m\chi^i + e\varepsilon^{k\ell mn}\overline{\psi}_k\overline{\sigma}_\ell\tilde{\mathscr{D}}_m\psi_n \\
&+\sqrt{2}egg_{ij^*}X^{*j(a)}\chi^i\lambda^{(a)} + \sqrt{2}egg_{ij^*}X^{i(a)}\overline{\chi}^j\overline{\lambda}^{(a)} \\
&-\frac{1}{2}egD^{(a)}\psi_m\sigma^m\overline{\lambda}^{(a)} + \frac{1}{2}egD^{(a)}\overline{\psi}_m\overline{\sigma}^m\lambda^{(a)} \\
&-\frac{1}{2}\sqrt{2}eg_{ij^*}\tilde{\mathscr{D}}_n A^{*j}\chi^i\sigma^m\overline{\sigma}^n\psi_m - \frac{1}{2}\sqrt{2}eg_{ij^*}\tilde{\mathscr{D}}_n A^i\overline{\chi}^j\overline{\sigma}^m\sigma^n\overline{\psi}_m \\
&+\frac{i}{4}e[\psi_m\sigma^{ab}\sigma^m\overline{\lambda}^{(a)} + \overline{\psi}_m\overline{\sigma}^{ab}\overline{\sigma}^m\lambda^{(a)}][F_{ab}{}^{(a)} + \hat{F}_{ab}{}^{(a)}] \\
&+\frac{1}{4}eg_{ij^*}[i\varepsilon^{k\ell mn}\psi_k\sigma_\ell\overline{\psi}_m + \psi_m\sigma^n\overline{\psi}^m]\chi^i\sigma_n\overline{\chi}^j \\
&-\frac{1}{8}e[g_{ij^*}g_{k\ell^*} - 2R_{ij^*k\ell^*}]\chi^i\chi^k\overline{\chi}^j\overline{\chi}^\ell \\
&+\frac{1}{8}eg_{ij^*}\overline{\chi}^j\overline{\sigma}^m\chi^i\overline{\lambda}^{(a)}\overline{\sigma}_m\lambda^{(a)} - \frac{3}{16}e\lambda^{(a)}\sigma^m\overline{\lambda}^{(a)}\lambda^{(b)}\sigma_m\overline{\lambda}^{(b)} \\
&-e\exp(K/2)\left\{P^*\psi_a\sigma^{ab}\psi_b + P\overline{\psi}_a\overline{\sigma}^{ab}\overline{\psi}_b + \frac{i}{2}\sqrt{2}D_iP\chi^i\sigma^a\overline{\psi}_a\right. \\
&\left.+\frac{i}{2}\sqrt{2}D_{i^*}P^*\overline{\chi}^i\overline{\sigma}^a\psi_a + \frac{1}{2}\mathscr{D}_iD_jP\chi^i\chi^j + \frac{1}{2}\mathscr{D}_{i^*}D_{j^*}P^*\overline{\chi}^i\overline{\chi}^j\right\} \\
&-e\exp(K)[g^{ij^*}(D_iP)(D_jP)^* - 3P^*P]
\end{aligned} \tag{25.12}$$

が，超重力理論の現象論的研究の出発点である．この表示で，スカラー A^i と，スピノル χ^i と $\lambda^{(a)}$ は物質場で，ベクトル $v_m{}^{(a)}$ はゲージ群 G のゲージ場である．ψ_m はグラビティーノ，$e_m{}^a$ は重力子である．式 (25.12) で，K，P，D はスカラー場の関数である．以前のように，計量 g_{ij^*} はケーラーである．

ラグランジアン (25.12) は，時空とケーラー座標変換のみならず，ゲージ変換に関しても共変的な微分，

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathscr{D}}_m A^i &= \partial_m A^i - g v_m{}^{(a)} X^{i(a)} \\
\tilde{\mathscr{D}}_m \chi^i &= \partial_m \chi^i + \chi^i \omega_m + \Gamma^i_{jk} \tilde{\mathscr{D}}_m A^j \chi^k - g v_m{}^{(a)} \frac{\partial X^{i(a)}}{\partial A^j} \chi^j \\
&\quad - \frac{1}{4}(K_j \tilde{\mathscr{D}}_m A^j - K_{j^*} \tilde{\mathscr{D}}_m A^{*j}) \chi^i - \frac{i}{2} g v_m{}^{(a)} \operatorname{Im} F^{(a)} \chi^i \\
\tilde{\mathscr{D}}_m \lambda^{(a)} &= \partial_m \lambda^{(a)} + \lambda^{(a)} \omega_m - g f^{abc} v_m{}^{(b)} \lambda^{(c)} \\
&\quad + \frac{1}{4}(K_j \tilde{\mathscr{D}}_m A^j - K_{j^*} \tilde{\mathscr{D}}_m A^{*j}) \lambda^{(a)} + \frac{i}{2} g v_m{}^{(b)} \operatorname{Im} F^{(b)} \lambda^{(a)} \qquad \textbf{(25.13)} \\
\tilde{\mathscr{D}}_m \psi_n &= \partial_m \psi_n + \psi_n \omega_m \\
&\quad + \frac{1}{4}(K_j \tilde{\mathscr{D}}_m A^j - K_{j^*} \tilde{\mathscr{D}}_m A^{*j}) \psi_n + \frac{i}{2} g v_m{}^{(a)} \operatorname{Im} F^{(a)} \psi_n \\
D_i P &= P_i + K_i P \\
\mathscr{D}_i D_j P &= P_{ij} + K_{ij} P + K_i D_j P + K_j D_i P - K_i K_j P - \Gamma^k_{ij} D_k P
\end{aligned}$$

を含んでいる．共変微分はケーラー幾何のクリストッフェル記号と時空のスピン接続 (17.12) を含んでいる．それらはまた，ベクトルポテンシャル $v_m{}^{(a)}$ を含む．共変微分がベクトルポテンシャルと $\operatorname{Im} F^{(a)}$ との結合を含むことに留意せよ．これは，ゲージ変換には成分場の超ワイル回転が付随する事実を反映している．

前出のラグランジアンは，ゲージ群 G のもとで不変である．成分場のゲージ変換は次で与えられる．

$$\begin{aligned}
\delta A^i &= \varepsilon^{(a)} X^{i(a)} \\
\delta \chi^i &= \varepsilon^{(a)} \frac{\partial X^{i(a)}}{\partial A^j} \chi^j + \frac{i}{2} \varepsilon^{(a)} \operatorname{Im} F^{(a)} \chi^i \\
\delta \lambda^{(a)} &= f^{abc} \varepsilon^{(b)} \lambda^{(c)} - \frac{i}{2} \varepsilon^{(b)} \operatorname{Im} F^{(b)} \lambda^{(a)} \qquad \textbf{(25.14)} \\
\delta v_m{}^{(a)} &= g^{-1} \partial_m \varepsilon^{(a)} + f^{abc} \varepsilon^{(b)} v_m{}^{(c)} \\
\delta \psi_n &= -\frac{i}{2} \varepsilon^{(a)} \operatorname{Im} F^{(a)} \psi_n .
\end{aligned}$$

それはまた，超空間形式で導かれたから，超重力変換のもとで自動的に不変である．しかし，次の変換則を使って不変性を直接に証明するのも教育的である．

$$
\begin{aligned}
\delta_\zeta e_m{}^a &= i(\zeta\sigma^a\overline{\psi}_m + \overline{\zeta}\overline{\sigma}^a\psi_m)\\
\delta_\zeta A^i &= \sqrt{2}\zeta\chi^i\\
\delta_\zeta\chi^i &= i\sqrt{2}\sigma^m\overline{\zeta}\hat{\hat{D}}_m A^i - \Gamma^i_{jk}\delta_\zeta A^j\chi^k\\
&\quad + \frac{1}{4}(K_j\delta_\zeta A^j - K_{j^*}\delta_\zeta A^{*j})\chi^i - \sqrt{2}e^{K/2}g^{ij^*}D_{j^*}P^*\zeta\\
\delta_\zeta v_m{}^{(a)} &= i(\zeta\sigma_m\overline{\lambda}^{(a)} + \overline{\zeta}\overline{\sigma}_m\lambda^{(a)})\\
\delta_\zeta\lambda^{(a)} &= \hat{F}_{ab}{}^{(a)}\sigma^{ab}\zeta - \frac{1}{4}(K_j\delta_\zeta A^j - K_{j^*}\delta_\zeta A^{*j})\lambda^{(a)} - igD^{(a)}\zeta\\
\delta_\zeta\psi_m &= 2\tilde{\mathscr{D}}_m\zeta - \frac{i}{2}\sigma_{mn}\zeta g_{ij^*}\chi^i\sigma^n\overline{\chi}^j + \frac{i}{2}(g_{mn}+\sigma_{mn})\zeta\lambda^{(a)}\sigma^n\overline{\lambda}^{(a)}\\
&\quad - \frac{1}{4}(K_j\delta_\zeta A^j - K_{j^*}\delta_\zeta A^{*j})\psi_m + ie^{K/2}P\sigma_m\overline{\zeta}
\end{aligned}
\qquad \textbf{(25.15)}
$$

ここで，$\tilde{\mathscr{D}}_m\zeta$ の定義は

$$
\tilde{\mathscr{D}}_m\zeta = \partial_m\zeta + \zeta\omega_m + \frac{1}{4}(K_j\tilde{\mathscr{D}}_m A^j - K_{j^*}\tilde{\mathscr{D}}_m A^{*j})\zeta. \qquad (25.16)
$$

ここで，超共変微分記号 $\hat{\hat{D}}_m A^i$ と $\hat{F}_{mn}$ は次で与えられる．

$$
\begin{aligned}
\hat{\hat{D}}_m A^i &= \hat{D}_m A^i - gv_m{}^{(a)}X^{i(a)}\\
&= \tilde{\mathscr{D}}_m A^i - \frac{1}{2}\sqrt{2}\psi_m\chi^i\\
\hat{F}_{mn}{}^{(a)} &= \hat{D}_m v_n{}^{(a)} - \hat{D}_n v_m{}^{(a)}\\
&= F_{mn}{}^{(a)} - \frac{i}{2}[\psi_m\sigma_n\overline{\lambda}^{(a)} + \overline{\psi}_m\overline{\sigma}_n\lambda^{(a)}\\
&\quad - \psi_n\sigma_m\overline{\lambda}^{(a)} - \overline{\psi}_n\overline{\sigma}_m\lambda^{(a)}].
\end{aligned}
\qquad (25.17)
$$

作用 (25.12) は，第 23 章のものとはゲージ超多重項の付加分だけ違いがある．付加された場は，スカラーポテンシャルの形 (23.10) を

$$
\mathscr{V} = \frac{1}{2}g^2 D^{(a)2} + e^K[g^{ij^*}(D_iP)(D_jP)^* - 3P^*P] \qquad \textbf{(25.18)}
$$

の形に変える．それはまた，トレース（固有和）公式 (23.34) を

$$\begin{aligned}\operatorname{Str} M^2 &= \sum_{スピン\ J} (-1)^{2J}(2J+1)\operatorname{Tr} M^2 \\ &= (n-1)[2m_\psi^2 - g^2\langle D^{(a)2}\rangle] \\ &\quad +2g^2\langle g^{ij^*} D^{(a)}_{ij^*} D^{(a)}\rangle - 2\langle R_{ij^*} G^i G^{j^*}\rangle m_\psi^2 \end{aligned} \qquad \textbf{(25.19)}$$

に変える．

変換則の形から，自発的超対称性の破れに対する条件が，i または (a) のある値に対して，

$$\langle D_i P\rangle \neq 0 \qquad (25.20)$$

または，

$$\langle D^{(a)}\rangle \neq 0 \qquad (25.21)$$

であることがわかる．χ^i と $\lambda^{(a)}$ の適当な線形組合せ，それは式 (25.20) と式 (25.21) の相対的な大きさに依存する，がゴールドストン・フェルミオンの役割をする．

ラグランジアン (25.12) がキリング・ポテンシャル $D^{(a)}$ をあらわに含んでいることに留意せよ．それらの存在は，群 G をゲージ化するのに必要で十分である．もし，群 G が U(1) 因子を含む場合は，以前の議論により，$D^{(a)}$ の定義が一意的でないことを知っている．各 U(1) 因子に付随する任意の積分定数

$$D \to D + \xi \qquad (25.22)$$

が存在する．大域的超対称な場合は，この定数のシフトがファイエ–イリオポロス D 項 $\mathscr{L}_{\rm FI}$ を生じる．同じことが超重力でも成り立つ．関数 D をシフトさせることにより，$\mathscr{L}_{\rm FI}$ のゲージ不変な超重力版

$$\mathscr{L}_{\rm FI} = -\frac{1}{2}eg^2\xi^2 - eg^2\xi D - \frac{1}{2}eg\xi(\psi_m\sigma^m\overline{\lambda} - \overline{\psi}_m\overline{\sigma}^m\lambda) \qquad (25.23)$$

を得る．シフト (25.22) が，変換則 (22.15) のみならず，スピノル共変微分を変化させる．キリング・ポテンシャル D を含むすべての表示に，ξ に比例する新たな項を引き起こす．

本章の残りで，われわれは，付録 A に書いた表記法に従って，4 成分表示でラグランジアン (25.12) を提示する．この公式と参考文献中のものとを比較するときは

注意が必要である．文献では表記法が変わっている．これを注意したうえで，ラグランジアンを次の形に書く．

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L} = & -\frac{1}{2}e\mathscr{R} - eg_{ij^*}\tilde{\mathscr{D}}_m A^i \tilde{\mathscr{D}}^m A^{*j} - \frac{1}{2}eg^2 D^{(a)2} \\
& -\frac{1}{4}eF_{mn}{}^{(a)}F^{mn(a)} - ie\overline{\lambda}_L^{(a)}\gamma^m \tilde{\mathscr{D}}_m \lambda_L^{(a)} \\
& -ieg_{ij^*}\overline{\chi}_L^j \gamma^m \tilde{\mathscr{D}}_m \chi_L^i + e\varepsilon^{k\ell mn}\overline{\psi}_{Lk}\gamma_\ell \tilde{\mathscr{D}}_m \psi_{Ln} \\
& +eg\sqrt{2}g_{ij^*}X^{*j(a)}\overline{\chi}_R^i \lambda_L^{(a)} + eg\sqrt{2}g_{ij^*}X^{i(a)}\overline{\chi}_L^i \lambda_R^{(a)} \\
& +\frac{1}{2}egD^{(a)}\overline{\psi}_{Lm}\gamma^m \lambda_L^{(a)} - \frac{1}{2}egD^{(a)}\overline{\psi}_{Rm}\gamma^m \lambda_R^{(a)} \\
& -\frac{1}{2}\sqrt{2}eg_{ij^*}\tilde{\mathscr{D}}_n A^{*j}\overline{\chi}_R^i \gamma^m \gamma^n \psi_{Lm} - \frac{1}{2}\sqrt{2}eg_{ij^*}\tilde{\mathscr{D}}_n A^i \overline{\chi}_L^j \gamma^m \gamma^n \psi_{Rm} \\
& +\frac{i}{4}e[\overline{\psi}_{Lm}\sigma^{ab}\gamma^m \lambda_L^{(a)} + \overline{\psi}_{Rm}\sigma^{ab}\gamma^m \lambda_R^{(a)}][F_{ab}{}^{(a)} + \hat{F}_{ab}{}^{(a)}] \\
& +\frac{1}{4}eg_{ij^*}[i\varepsilon^{k\ell mn}\overline{\psi}_{Lk}\gamma_\ell \psi_{Lm} - \overline{\psi}_{Lm}\gamma^n \psi_L^m]\overline{\chi}_R^i \gamma_n \chi_R^j \\
& -\frac{1}{8}e[g_{ij^*}g_{k\ell^*} - 2R_{ij^*k\ell^*}]\overline{\chi}_R^i \chi_L^k \overline{\chi}_L^j \chi_R^\ell \\
& -\frac{1}{8}eg_{ij^*}\overline{\chi}_L^j \gamma^m \chi_L^i \overline{\lambda}_R^{(a)}\gamma_m \lambda_R^{(a)} + \frac{3}{16}e\overline{\lambda}_L^{(a)}\gamma^m \lambda_L^{(a)}\overline{\lambda}_R^{(b)}\gamma_m \lambda_R^{(b)} \\
& -e\exp(K/2)\Big\{P^*\psi_{Ra}\sigma^{ab}\psi_{Lb} + P\overline{\psi}_{La}\sigma^{ab}\psi_{Rb} \\
& +\frac{i}{2}\sqrt{2}D_i P\overline{\chi}_R^i \gamma^a \psi_{Ra} + \frac{i}{2}\sqrt{2}D_{i^*}P^*\overline{\chi}_L^i \gamma^a \psi_{La} \\
& +\frac{1}{2}\mathscr{D}_i D_j P\overline{\chi}_R^i \chi_L^j + \frac{1}{2}\mathscr{D}_{i^*}D_{j^*}P^*\overline{\chi}_L^i \chi_R^j\Big\} \\
& -e\exp(K)[g^{ij^*}(D_i P)(D_j P)^* - 3P^*P].
\end{aligned}
\tag{25.24}
$$

ここで，$\chi^i{}_{L,R} = (1/2)(1 \pm \gamma_5)\chi^i$，そして，$\lambda^{(a)}$ と ψ_m についても同様である．共変微分は次のように定義される．

$$
\begin{aligned}
\tilde{\mathscr{D}}_m A^i &= \partial_m A^i - gv_m{}^{(a)}X^{i(a)} \\
\tilde{\mathscr{D}}_m \chi_L^i &= \partial_m \chi_L^i - \omega_m \chi_L^i + \Gamma^i_{jk}\tilde{\mathscr{D}}_m A^j \chi_L^k - gv_m{}^{(a)}\frac{\partial X^{i(a)}}{\partial A^j}\chi_L^j \\
&\quad -\frac{1}{4}(K_j \tilde{\mathscr{D}}_m A^j - K_{j^*}\tilde{\mathscr{D}}_m A^{*j})\chi_L^i - \frac{i}{2}gv_m{}^{(a)}\,\mathrm{Im}\,F^{(a)}\chi_L^i \\
\tilde{\mathscr{D}}_m \lambda_L^{(a)} &= \partial_m \lambda_L^{(a)} - \omega_m \lambda_L^{(a)} - gf^{abc}v_m{}^{(b)}\lambda_L^{(c)} \\
&\quad +\frac{1}{4}(K_j \tilde{\mathscr{D}}_m A^j - K_{j^*}\tilde{\mathscr{D}}_m A^{*j})\lambda_L^{(a)} + \frac{i}{2}gv_m{}^{(b)}\,\mathrm{Im}\,F^{(b)}\lambda_L^{(a)}
\end{aligned}
\tag{25.25}
$$

$$\tilde{\mathscr{D}}_m\psi_{Ln} = \partial_m\psi_{Ln} - \omega_m\psi_{Ln} + \frac{1}{4}(K_j\tilde{\mathscr{D}}_m A^j - K_{j^*}\tilde{\mathscr{D}}_m A^{*j})\psi_{Ln} + \frac{i}{2}g v_m{}^{(a)}\,\mathrm{Im}\,F^{(a)}\psi_{Ln}$$
$$D_iP = P_i + K_iP$$
$$\mathscr{D}_iD_jP = P_{ij} + K_{ij}P + K_iD_jP + K_jD_iP - K_iK_jP - \Gamma^k_{ij}D_kP.$$

ラグランジアン (25.24) は，超重力変換

$$\begin{aligned}
\delta_\zeta e_m{}^a &= i(\overline{\zeta}_L\gamma^a\psi_{Lm} + \overline{\zeta}_R\gamma^a\psi_{Rm})\\
\delta_\zeta A^i &= \sqrt{2}\,\overline{\zeta}_R\chi^i_L\\
\delta_\zeta\chi^i_L &= i\sqrt{2}\gamma^m\zeta_R\hat{\tilde{D}}_mA^i - \Gamma^i_{jk}\delta_\zeta A^j\chi^k_L\\
&\quad + \frac{1}{4}(K_j\delta_\zeta A^j - K_{j^*}\delta_\zeta A^{*j})\chi^i_L - \sqrt{2}e^{K/2}g^{ij^*}D_{j^*}P^*\zeta_L\\
\delta_\zeta v_m{}^{(a)} &= i(\overline{\zeta}_L\gamma_m\lambda^{(a)}_L + \overline{\zeta}_R\gamma_m\lambda^{(a)}_R)\\
\delta_\zeta\lambda^{(a)}_L &= \hat{F}_{ab}{}^{(a)}\sigma^{ab}\zeta_L - \frac{1}{4}(K_j\delta_\zeta A^j - K_{j^*}\delta_\zeta A^{*j})\lambda^{(a)}_L - igD^{(a)}\zeta_L\\
\delta_\zeta\psi_{Lm} &= 2\tilde{\mathscr{D}}_m\zeta_L - \frac{i}{2}\sigma_{mn}\zeta_L g_{ij^*}\overline{\chi}^i_R\gamma^n\chi^j_R + \frac{i}{2}(g_{mn} + \sigma_{mn})\zeta_L\overline{\lambda}^{(a)}_R\gamma^n\lambda^{(a)}_R\\
&\quad - \frac{1}{4}(K_j\delta_\zeta A^j - K_{j^*}\delta_\zeta A^{*j})\psi_{Lm} + ie^{K/2}P\gamma_m\zeta_R,
\end{aligned} \tag{25.26}$$

のもとで不変である．ここで，$\tilde{\mathscr{D}}_m\zeta_L$ は，

$$\tilde{\mathscr{D}}_m\zeta_L = \partial_m\zeta_L - \omega_m\zeta_L + \frac{1}{4}(K_j\tilde{\mathscr{D}}_mA^j - K_{j^*}\tilde{\mathscr{D}}_mA^{*j})\zeta_L \tag{25.27}$$

で与えられる．

文　　献

J. A. Bagger, Nucl. Phys. **B211**, 201 (1983).
E. Cremmer, S. Ferrara, L. Girardello, and A. van Proeyen, Nucl. Phys. **B212**, 413 (1983).

重要な式

$$\mathscr{L} = \int d^2\Theta\, 2\mathscr{E}\left[\frac{3}{8}(\overline{\mathscr{D}}\,\overline{\mathscr{D}} - 8R)\exp\left\{-\frac{1}{3}\Big[K(\Phi,\Phi^+) + \Gamma(\Phi,\Phi^+,V)\Big]\right\} + \frac{1}{16g^2}H_{(ab)}(\Phi)W^{(a)}W^{(b)} + P(\Phi)\right] + \text{h.c.} \tag{25.1}$$

$$W_\alpha \equiv W_\alpha^{(a)} T^{(a)} = -\frac{1}{4}(\overline{\mathscr{D}}\,\overline{\mathscr{D}} - 8R) e^{-V} \mathscr{D}_\alpha e^V \tag{25.2}$$

$$\begin{aligned}
\mathscr{L} = & -\frac{1}{2} e\mathscr{R} - e g_{ij^*} \tilde{\mathscr{D}}_m A^i \tilde{\mathscr{D}}^m A^{*j} - \frac{1}{2} e g^2 D^{(a)2} \\
& -\frac{1}{4} e F_{mn}{}^{(a)} F^{mn(a)} - i e \overline{\lambda}^{(a)} \overline{\sigma}^m \tilde{\mathscr{D}}_m \lambda^{(a)} \\
& - i e g_{ij^*} \overline{\chi}^j \overline{\sigma}^m \tilde{\mathscr{D}}_m \chi^i + e \varepsilon^{k\ell mn} \overline{\psi}_k \overline{\sigma}_\ell \tilde{\mathscr{D}}_m \psi_n \\
& + \sqrt{2} e g g_{ij^*} X^{*j(a)} \chi^i \lambda^{(a)} + \sqrt{2} e g g_{ij^*} X^{i(a)} \overline{\chi}^j \overline{\lambda}^{(a)} \\
& - \frac{1}{2} e g D^{(a)} \psi_m \sigma^m \overline{\lambda}^{(a)} + \frac{1}{2} e g D^{(a)} \overline{\psi}_m \overline{\sigma}^m \lambda^{(a)} \\
& - \frac{1}{2} \sqrt{2} e g_{ij^*} \tilde{\mathscr{D}}_n A^{*j} \chi^i \sigma^m \overline{\sigma}^n \psi_m - \frac{1}{2} \sqrt{2} e g_{ij^*} \tilde{\mathscr{D}}_n A^i \overline{\chi}^j \overline{\sigma}^m \sigma^n \overline{\psi}_m \\
& + \frac{i}{4} e [\psi_m \sigma^{ab} \sigma^m \overline{\lambda}^{(a)} + \overline{\psi}_m \overline{\sigma}^{ab} \overline{\sigma}^m \lambda^{(a)}][F_{ab}{}^{(a)} + \hat{F}_{ab}{}^{(a)}] \\
& + \frac{1}{4} e g_{ij^*} [i \varepsilon^{k\ell mn} \psi_k \sigma_\ell \overline{\psi}_m + \psi_m \sigma^n \overline{\psi}^m] \chi^i \sigma_n \overline{\chi}^j \\
& - \frac{1}{8} e [g_{ij^*} g_{k\ell^*} - 2 R_{ij^* k\ell^*}] \chi^i \chi^k \overline{\chi}^j \overline{\chi}^\ell \\
& + \frac{1}{8} e g_{ij^*} \overline{\chi}^j \overline{\sigma}^m \chi^i \overline{\lambda}^{(a)} \overline{\sigma}_m \lambda^{(a)} - \frac{3}{16} e \lambda^{(a)} \sigma^m \overline{\lambda}^{(a)} \lambda^{(b)} \sigma_m \overline{\lambda}^{(b)} \\
& - e \exp(K/2) \Big\{ P^* \psi_a \sigma^{ab} \psi_b + P \overline{\psi}_a \overline{\sigma}^{ab} \overline{\psi}_b + \frac{i}{2} \sqrt{2} D_i P \chi^i \sigma^a \overline{\psi}_a \\
& + \frac{i}{2} \sqrt{2} D_{i^*} P^* \overline{\chi}^i \overline{\sigma}^a \psi_a + \frac{1}{2} \mathscr{D}_i D_j P \chi^i \chi^j + \frac{1}{2} \mathscr{D}_{i^*} D_{j^*} P^* \overline{\chi}^i \overline{\chi}^j \Big\} \\
& - e \exp(K) [g^{ij^*} (D_i P)(D_j P)^* - 3 P^* P]
\end{aligned} \tag{25.12}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathscr{D}}_m A^i &= \partial_m A^i - g v_m{}^{(a)} X^{i(a)} \\
\tilde{\mathscr{D}}_m \chi^i &= \partial_m \chi^i + \chi^i \omega_m + \Gamma^i_{jk} \tilde{\mathscr{D}}_m A^j \chi^k - g v_m{}^{(a)} \frac{\partial X^{i(a)}}{\partial A^j} \chi^j \\
& \quad - \frac{1}{4} (K_j \tilde{\mathscr{D}}_m A^j - K_{j^*} \tilde{\mathscr{D}}_m A^{*j}) \chi^i - \frac{i}{2} g v_m{}^{(a)} \operatorname{Im} F^{(a)} \chi^i \\
\tilde{\mathscr{D}}_m \lambda^{(a)} &= \partial_m \lambda^{(a)} + \lambda^{(a)} \omega_m - g f^{abc} v_m{}^{(b)} \lambda^{(c)} \\
& \quad + \frac{1}{4} (K_j \tilde{\mathscr{D}}_m A^j - K_{j^*} \tilde{\mathscr{D}}_m A^{*j}) \lambda^{(a)} + \frac{i}{2} g v_m{}^{(b)} \operatorname{Im} F^{(b)} \lambda^{(a)} \qquad (25.13) \\
\tilde{\mathscr{D}}_m \psi_n &= \partial_m \psi_n + \psi_n \omega_m \\
& \quad + \frac{1}{4} (K_j \tilde{\mathscr{D}}_m A^j - K_{j^*} \tilde{\mathscr{D}}_m A^{*j}) \psi_n + \frac{i}{2} g v_m{}^{(a)} \operatorname{Im} F^{(a)} \psi_n
\end{aligned}$$

$$D_i P = P_i + K_i P$$

$$\mathscr{D}_i D_j P = P_{ij} + K_{ij} P + K_i D_j P + K_j D_i P - K_i K_j P - \Gamma^k_{ij} D_k P$$

$$\begin{aligned} \delta A^i &= \varepsilon^{(a)} X^{i(a)} \\ \delta \chi^i &= \varepsilon^{(a)} \frac{\partial X^{i(a)}}{\partial A^j} \chi^j + \frac{i}{2} \varepsilon^{(a)} \operatorname{Im} F^{(a)} \chi^i \\ \delta \lambda^{(a)} &= f^{abc} \varepsilon^{(b)} \lambda^{(c)} - \frac{i}{2} \varepsilon^{(b)} \operatorname{Im} F^{(b)} \lambda^{(a)} \\ \delta v_m{}^{(a)} &= g^{-1} \partial_m \varepsilon^{(a)} + f^{abc} \varepsilon^{(b)} v_m{}^{(c)} \\ \delta \psi_n &= -\frac{i}{2} \varepsilon^{(a)} \operatorname{Im} F^{(a)} \psi_n \end{aligned} \tag{25.14}$$

$$\begin{aligned} \delta_\zeta e_m{}^a &= i(\zeta \sigma^a \overline{\psi}_m + \overline{\zeta} \overline{\sigma}^a \psi_m) \\ \delta_\zeta A^i &= \sqrt{2} \zeta \chi^i \\ \delta_\zeta \chi^i &= i\sqrt{2} \sigma^m \overline{\zeta} \hat{\tilde{D}}_m A^i - \Gamma^i_{jk} \delta_\zeta A^j \chi^k \\ &\quad + \frac{1}{4}(K_j \delta_\zeta A^j - K_{j^*} \delta_\zeta A^{*j}) \chi^i - \sqrt{2} e^{K/2} g^{ij^*} D_{j^*} P^* \zeta \\ \delta_\zeta v_m{}^{(a)} &= i(\zeta \sigma_m \overline{\lambda}^{(a)} + \overline{\zeta} \overline{\sigma}_m \lambda^{(a)}) \\ \delta_\zeta \lambda^{(a)} &= \hat{F}_{ab}{}^{(a)} \sigma^{ab} \zeta - \frac{1}{4}(K_j \delta_\zeta A^j - K_{j^*} \delta_\zeta A^{*j}) \lambda^{(a)} - igD^{(a)} \zeta \\ \delta_\zeta \psi_m &= 2\tilde{\mathscr{D}}_m \zeta - \frac{i}{2} \sigma_{mn} \zeta g_{ij^*} \chi^i \sigma^n \overline{\chi}^j + \frac{i}{2}(g_{mn} + \sigma_{mn}) \zeta \lambda^{(a)} \sigma^n \overline{\lambda}^{(a)} \\ &\quad - \frac{1}{4}(K_j \delta_\zeta A^j - K_{j^*} \delta_\zeta A^{*j}) \psi_m + ie^{K/2} P \sigma_m \overline{\zeta} \end{aligned} \tag{25.15}$$

$$\mathscr{V} = \frac{1}{2} g^2 D^{(a)2} + e^K [g^{ij^*} (D_i P)(D_j P)^* - 3P^* P] \tag{25.18}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Str} M^2 &= \sum_{\text{スピン } J} (-1)^{2J} (2J+1) \operatorname{Tr} M^2 \\ &= (n-1)[2m_\psi^2 - g^2 \langle D^{(a)2} \rangle] \\ &\quad + 2g^2 \langle g^{ij^*} D^{(a)}_{ij^*} D^{(a)} \rangle - 2\langle R_{ij^*} G^i G^{j^*} \rangle m_\psi^2 \end{aligned} \tag{25.19}$$

演　　習

(1)
$$W_\alpha = -\frac{1}{4}(\overline{\mathscr{D}}_{\dot\alpha}\overline{\mathscr{D}}^{\dot\alpha} - 8R)(e^{-V}\mathscr{D}_\alpha e^V)$$

が，次のノンアーベリアンゲージ変換

$$e^{V'} = e^{-i\Lambda^+}e^V e^{i\Lambda}$$

のもとで不変であることを示せ．ここで，

$$\overline{\mathscr{D}}_{\dot\alpha}\Lambda = \mathscr{D}_\alpha\Lambda^+ = 0$$

である．

(2)　WZ ゲージで

$$e^{-V}\mathscr{D}_\alpha e^V = \mathscr{D}_\alpha V - \frac{1}{2}[V, \mathscr{D}_\alpha V]$$

を証明せよ．

(3)　アーベル群に対して，W の成分は式 (19.28) で与えられる．第 19 章の演習 (7) の結果を使って，

$$(\overline{\mathscr{D}}_{\dot\alpha}\overline{\mathscr{D}}^{\dot\alpha} - 8R)[V, \mathscr{D}_\alpha V]| = 0$$
$$\mathscr{D}_\beta(\overline{\mathscr{D}}_{\dot\alpha}\overline{\mathscr{D}}^{\dot\alpha} - 8R)[V, \mathscr{D}_\alpha V]| = 8(\sigma^{ab}\varepsilon)_{\beta\alpha}v_a v_b$$
$$\mathscr{D}^\beta\mathscr{D}_\beta(\overline{\mathscr{D}}_{\dot\alpha}\overline{\mathscr{D}}^{\dot\alpha} - 8R)[V, \mathscr{D}_\alpha V]| = -16i[v_{\alpha\dot\alpha}, \overline{\lambda}^{\dot\alpha}] - 8i[v^c, v_{\alpha\dot\alpha}\overline{\psi}_c{}^{\dot\alpha}]$$

を証明せよ．それから，ノンアーベル群 G に対して W のすべての成分を見つけよ．

(4)
$$\begin{aligned}(\overline{\mathscr{D}}_{\dot\alpha}\overline{\mathscr{D}}^{\dot\alpha} - 8R)\Phi^+V = {}& 2\Theta\{iA^*(2\lambda + \sigma^c\overline{\sigma}^a\psi_c v_a) - \sqrt{2}\sigma^a\overline{\chi}v_a\} \\ & +\Theta\Theta\{i2\sqrt{2}\overline{\chi}\overline{\lambda} + 4i\hat{D}_c A^* v^c \\ & +A^*[-2D + 2ie_c{}^m\mathscr{D}_m v^c - \frac{4}{3}v_a b^a \\ & +\overline{\psi}_c\overline{\sigma}^c\lambda - \overline{\lambda}\overline{\sigma}^c\psi_c - \psi^d\sigma^c\overline{\psi}_d v_c]\}\end{aligned}$$

と

$$(\overline{\mathscr{D}}_{\dot\alpha}\overline{\mathscr{D}}^{\dot\alpha} - 8R)\Phi^+V^2 = 2\Theta\Theta A^* v_a v^a$$

を計算せよ．

(5)　WZ ゲージで

$$(\overline{\mathscr{D}}_{\dot{\alpha}}\overline{\mathscr{D}}^{\dot{\alpha}} - 8R)\Phi^{+}V^{3} = 0$$

を検証せよ．

26. 低エネルギー定理

カイラル力学の研究では，低エネルギー有効理論を構築するのにカイラル対称性の非線形表現が有益であることがわかった．本章では，自発的に破れた超対称性の低エネルギー効果を記述するために，類似の技法を使うことが可能であることをみる．その結果の低エネルギー理論は，対称性の破れの大きさ（scale）よりはるかに下のエネルギーでのゴールドストンと物質場の有効結合を記述する．

通常のカイラル力学の証明は，有界群（compat group）の有限体積に依存しているので，超対称性に対して低エネルギー定理が成り立つ事実は驚きかもしれない．超対称性では，群のパラメーターの反交換性のために体積が消えるからである．それにもかかわらず，別の証明が低エネルギー定理の超対称性版の正しさを与えることをみる．

カイラル力学では，群 G が部分群 H に自発的に破れるときに，低エネルギー定理が適応される．部分群 H は物理的な場の上に線形に表現されるが，一方で，G の残りの生成子は，G/H に対する商空間パラメーターによって，非線形に実現される．商空間パラメーターは，G から H への自発的な破れに付随するゴールドストン・ボソンと解釈される．

G の非線形表現は，場の再定義までで（を除いて）決まる．それらはしばしば**標準表現**（*standard representation*）として知られるある正準形で媒介変数表示される．これらの表現は，部分群 H 上では線形である．H のいかなる線形表現も，G の標準表現に昇格できる．逆に，H の上で線形である G のいかなる表現も，標準表現とゴールドストン場の組に分解できる．

超対称性の場合には，ローレンツ群が部分群 H の役割をする．残っている生成子は純粋に超対称性を生成する．第 11 章でこの構成を使ってゴールドストン・フェルミオン λ に対する非線形表現

$$\begin{aligned}\delta_\xi \lambda_\alpha(x) &= \frac{1}{\kappa}\xi_\alpha - i v_\xi^m(x)\partial_m \lambda_\alpha(x)\\ \delta_\xi \overline{\lambda}_{\dot\alpha}(x) &= \frac{1}{\kappa}\overline{\xi}_{\dot\alpha} - i v_\xi^m(x)\partial_m \overline{\lambda}_{\dot\alpha}(x)\\ v_\xi^m(x) &= \kappa[\lambda(x)\sigma^m\overline{\xi} - \xi\sigma^m\overline{\lambda}(x)]\end{aligned} \tag{26.1}$$

を見つけた．ここで，κ は，カイラル力学の f_π に類似の，超対称性の破れのスケールを示すパラメーターである．これらは，第 6 章で導入した技術を使って超場形式にもち上げることができる．関連する構成は式 (4.11) に与えられていて，いまの場合，それは最低次の成分がゴールドスティノ λ である超場を与える．

$$\begin{aligned}\Lambda_\alpha(x,\theta,\overline{\theta}) &= \exp(\theta Q + \overline{\theta}\,\overline{Q}) \times \lambda_\alpha(x)\\ \overline{\Lambda}_{\dot\alpha}(x,\theta,\overline{\theta}) &= \exp(\theta Q + \overline{\theta}\,\overline{Q}) \times \overline{\lambda}_{\dot\alpha}(x).\end{aligned} \tag{26.2}$$

超場 Λ は，λ，λ の微分，定数 κ から構築される．

$$\begin{aligned}\Lambda_\alpha(x,\theta,\overline{\theta}) &= \lambda_\alpha(x) + \frac{1}{\kappa}\theta_\alpha + \cdots\\ \overline{\Lambda}_{\dot\alpha}(x,\theta,\overline{\theta}) &= \overline{\lambda}_{\dot\alpha}(x) + \frac{1}{\kappa}\overline{\theta}_{\dot\alpha} + \cdots .\end{aligned} \tag{26.3}$$

変換 (4.10) は，Λ の最低次に応用されると，式 (26.1) に帰着することを示すのは短い演習である．

ゴールドストン超場 Λ は，また，ある拘束条件の組の解として定義されうる．これらの条件は，恒等式

$$\begin{aligned}D_\alpha \exp(\theta Q + \overline{\theta}\,\overline{Q}) \times\ &= \exp(\theta Q + \overline{\theta}\,\overline{Q}) Q_\alpha \times\\ \overline{D}_{\dot\alpha} \exp(\theta Q + \overline{\theta}\,\overline{Q}) \times\ &= \exp(\theta Q + \overline{\theta}\,\overline{Q}) \overline{Q}_{\dot\alpha} \times\end{aligned} \tag{26.4}$$

の助けを借りて見つけられる．式 (26.4) を，式 (26.2) に応用し，式 (26.1) を使って

$$\begin{aligned}D_\beta \Lambda_\alpha &= \frac{1}{\kappa}\varepsilon_{\alpha\beta} + i\kappa\sigma_{\alpha\dot\beta}{}^m \overline{\Lambda}^{\dot\beta}\partial_m \Lambda_\alpha\\ \overline{D}_{\dot\beta}\Lambda_\alpha &= -i\kappa\Lambda^\beta\sigma_{\beta\dot\beta}{}^m\partial_m\Lambda_\alpha.\end{aligned} \tag{26.5}$$

これらの拘束は，D 代数 (4.7) と矛盾しない．この解は，式 (26.2) で与えられる超場 Λ である．

低エネルギー定理を導くためには，標準表現の超対称性版が必要である．われわれは，超対称性の標準表現を次の変換則で定義する．

$$\delta_\xi f(x) = -iv_\xi^n(x)\frac{\partial}{\partial x^n}f(x). \tag{26.6}$$

ここで，$v_\xi{}^n$ は式 (26.1) で与えられている．演習で式 (26.6) が超対称代数の中で閉じることを示す．場 f は，ローレンツや内部対称性の任意の添字（の組合せ）をもっていてよい．

ゴールドストン・フェルミオン λ の場合と同様に，f を超場 F に格上げして，その変分が最低次成分で式 (26.6) に帰着するようにしたい．第 4 章の構成を使って，

$$\begin{aligned} F(x,\theta,\overline{\theta}) &= \exp(\theta Q + \overline{\theta}\,\overline{Q}) \times f(x) \\ &= f(x) - iv_\theta^n(x)\frac{\partial}{\partial x^n}f(x) + \cdots . \end{aligned} \tag{26.7}$$

式 (26.7) で超場 F は f と同じ添字をもつ．その成分は，λ，f とその微分から構成される．式 (26.7) はまた，拘束方程式

$$\begin{aligned} D_\alpha F &= i\kappa(\sigma^m\overline{\Lambda})_\alpha \partial_m F \\ \overline{D}_{\dot\alpha} F &= -i\kappa(\Lambda\sigma^m)_{\dot\alpha}\partial_m F \end{aligned} \tag{26.8}$$

から解として導かれる．

カイラル力学の場合は，任意の非線形表現を標準表現に変える方法はよく知られている．付録 E で示されているように，ゴールドストン・フェルミオンをゼロに変換する場依存パラメーターをもつ有限群変換を単純に応用する．この手続きは超対称性にも機能する．これをみるために，$\tilde{f}$ を超対称性の任意の非線形表現，$\tilde{F}$ をその超場拡張としよう．標準表現 F' は

$$F'(x,\theta,\overline{\theta},\lambda) = e^{\xi Q + \overline{\xi}\,\overline{Q}}\tilde{F}(x,\theta,\overline{\theta})|_{\xi=-\kappa\lambda} \tag{26.9}$$

をとることで得られる．ここで，Q は微分演算子 (4.4)，そして，すべての微分を実行した後に，$\xi = -\kappa\lambda$ を代入する．われわれは，式 (26.9) を，よりあらわな形に，書くことができる．そこでは，λ の微分を避けて，中身（内容）を次のように変える．

$$F'(x,\theta,\overline{\theta},\lambda) = \exp\left[iv_\theta^m(y)\frac{\partial}{\partial x^m}\right]\exp\left[-\kappa\left(\lambda(y)\frac{\partial}{\partial\theta} + \overline{\lambda}(y)\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}}\right)\right]$$

$$\times \tilde{F}(x,\theta,\overline{\theta})|_{x=y}. \tag{26.10}$$

この表現では，

$$\left[\left(\lambda(y)\frac{\partial}{\partial\theta}+\overline{\lambda}(y)\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}}\right), v_\theta^m(y)\right]=0 \tag{26.11}$$

の事実から，指数関数を分離できる．

f' が標準表現であることを示すために，超対称変換から F' の変化を計算しなければならない．これは，式 (26.10) を使えば最も容易である．$v_\theta{}^m$ の変分は式 (26.1) から，

$$\delta_\xi v_\theta^m(y)=\xi\sigma^m\overline{\theta}-\theta\sigma^m\overline{\xi}-iv_\xi^n(y)\frac{\partial}{\partial y^n}v_\theta^m(y). \tag{26.12}$$

式 (26.1)，(26.12)，(4.4) を使って，F' の変化が計算できて，

$$\begin{aligned}\delta_\xi F'(x,\theta,\overline{\theta},\lambda)=&\left\{\left[i(\xi\sigma^m\overline{\theta}-\theta\sigma^m\overline{\xi})\frac{\partial}{\partial x^m}-iv_\xi^n(y)\frac{\partial}{\partial y^n}\right]\exp\left[iv_\theta^m(y)\frac{\partial}{\partial x^m}\right]\right\}\\&\times\exp\left[-\kappa\left(\lambda(y)\frac{\partial}{\partial\theta}+\overline{\lambda}(y)\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}}\right)\right]\tilde{F}(x,\theta,\overline{\theta})\\&+\exp\left[iv_\theta^m(y)\frac{\partial}{\partial x^m}\right]\left\{\left[-\xi\frac{\partial}{\partial\theta}-\overline{\xi}\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}}-iv_\xi^n(y)\frac{\partial}{\partial y^n}\right]\right.\\&\left.\times\exp\left[-\kappa\left(\lambda(y)\frac{\partial}{\partial\theta}+\overline{\lambda}(y)\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}}\right)\right]\right\}\tilde{F}(x,\theta,\overline{\theta})\\&+\exp\left[iv_\theta^m(y)\frac{\partial}{\partial x^m}\right]\exp\left[-\kappa\left(\lambda(y)\frac{\partial}{\partial\theta}+\overline{\lambda}(y)\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}}\right)\right]\\&\times\left\{\xi\frac{\partial}{\partial\theta}+\overline{\xi}\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}}-i(\xi\sigma^m\overline{\theta}-\theta\sigma^m\overline{\xi})\frac{\partial}{\partial x^m}\right\}\tilde{F}(x,\theta,\overline{\theta})\bigg|_{x=y}\\=&-iv_\xi^n(x)\frac{\partial}{\partial x^n}F'(x,\theta,\overline{\theta},\lambda).\end{aligned} \tag{26.13}$$

最低次成分をとると，f' が実際に標準表現として変換することがわかる．

$$\delta_\xi f'(x,\lambda)=-iv_\xi^n(x)\frac{\partial}{\partial x^n}f'(x,\lambda). \tag{26.14}$$

上のように，場 f' と F' は任意のローレンツ，または，内部対称性の添字を運ぶことができる．

これらの結果をもって，われわれは任意のローレンツ不変なラグランジアンを超対称化する立場にいる．第1段階は，ゴールドストン・スピノル Λ に対するラグランジアンを見つけることである．明らかに二つの選択肢があり，

$$\mathscr{L}_0 = -\frac{\kappa^2}{2}\int d^2\theta d^2\overline{\theta}\Lambda^2\overline{\Lambda}^2 \tag{26.15}$$

と

$$\mathscr{L}_1 = -\frac{1}{2}\int d^2\theta d^2\overline{\theta}(\Lambda^2 + \overline{\Lambda}^2) \tag{26.16}$$

である．$\Lambda^2 + \overline{\Lambda}^2$ の最高次成分は時空の全微分なので，式 (26.16) は超対称作用としては，不適当である．対照的に，式 (26.15) は完璧に素晴らしく，成分場で展開すると式 (11.11) に一致することがわかる．われわれは，それをゴールドストン・フェルミオンに対するラグランジアンに採用する．

次の段階は，物質超場を構成することである．われわれは，元の物質場から出発するし，それはローレンツ群と内部対称群のもとで確定した変換性をもつとする．われわれは，式 (26.6) を通じて物質場に超対称変換を割り振り，それらを式 (26.7) を通じて超場に格上げする．この方法で，われわれは元の理論の物質場ごとに一つの超場を構築する．

最後の段階は，超対称物質結合を構築することである．われわれは，元のラグランジアン $\tilde{\mathscr{L}}$ から出発する，そして，すべての物質場を対応する超場でおき換える．これは，その最低次成分が元のラグランジアンである，超場ラグランジアンを与える．次に，超場の表現 $\Lambda^2\overline{\Lambda}^2$,

$$\Lambda^2\overline{\Lambda}^2 = \frac{1}{\kappa^4}\theta^2\overline{\theta}^2 + \cdots \tag{26.17}$$

を掛けることにより，この最低次成分を最高次成分にする．これが十分な超対称ラグランジアン，

$$\mathscr{L} = \kappa^4\int d^2\theta d^2\overline{\theta}\Lambda^2\overline{\Lambda}^2\tilde{\mathscr{L}} \tag{26.18}$$

を与える．ここで，λ に依存しない部分は，元の $\tilde{\mathscr{L}}$ である．

非線形表現の理論の通常として，有効作用に高階微分項を含めることは常に可能である．例えば，

$$\mathscr{L}_2 = \int d^2\theta d^2\overline{\theta}(\overline{D}^2\Lambda^2)(D^2\overline{\Lambda}^2) \sim (\partial_m\lambda\sigma^{mn}\partial_n\lambda)(\partial_k\overline{\lambda}\overline{\sigma}^{k\ell}\partial_\ell\overline{\lambda}) + \cdots \tag{26.19}$$

の形の寄与は，$\mathscr{L}$ に高次微分相互作用を加える．このような項の係数は，対称性からは決まらず，理論のパラメーターとみなさなければならない．微分展開における

主導項だけが唯一無二（unique）の項である．高エネルギーでは高次項が重要になり，予言力を失う．

ラグランジアン (26.18) は，理論の低エネルギー相互作用を記述し，そこでは，超対称性が，低エネルギー有効理論に含まれるエネルギースケールよりもはるかに大きいあるスケールで，自発的に破れる．例えば，その形式（formalism）は物理的な場のすべての超対称パートナーが非常に重い（ゴールドスティノを除く）状況に適応する．この場合は，低エネルギー散乱振幅は有効理論で決められる．超対称性の唯一の信号はゴールドスティノと物理的場の非線形結合である．

この構築を例示するために，自由なスカラー場 $a(x)$ と自由なスピノル場 $\psi(x)$ の場合を考えよう．

$$\tilde{\mathscr{L}} = -\frac{1}{2}\partial_m a \partial^m a - \frac{1}{2}m^2 a^2 - i\psi\sigma^m\partial_m\overline{\psi} - \frac{1}{2}\mu(\psi^2 + \overline{\psi}^2). \quad (26.20)$$

われわれは，$a(x)$ と $\psi(x)$ に式 (26.6) を通じて変換性を割り振ってラグランジアンを超対称化し，それらを，拘束 (26.8) を満たす超場 A と Ψ に，昇格させる．その後，式 (26.20) の中の場を A と Ψ によっておき換えて，超場ラグランジアン $\mathscr{L}$ を得る．

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_0 + \int d^2\theta d^2\overline{\theta}\Lambda^2\overline{\Lambda}^2\left[-\frac{1}{2}\partial_m A\partial^m A - \frac{1}{2}m^2A^2 \right.$$
$$\left. - i\Psi\sigma^m\partial_m\overline{\Psi} - \frac{1}{2}\mu(\Psi^2 + \overline{\Psi}^2)\right]. \quad (26.21)$$

ラグランジアン (26.21) は，ゴールドストン・スピノル λ で展開されるべきである．助けになる巧妙な手段は，$d^2\theta d^2\overline{\theta}$ を $D^2\overline{D}^2/16$ でおき換え，拘束 (26.5)，(26.8) を使って D と $\overline{D}$ の微分を計算することである．λ の 2 次までで，その結果のラグランジアンは

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{2\kappa^2} - i\lambda\sigma^m\partial_m\overline{\lambda} + \frac{i}{\kappa^2}\lambda\sigma^m\overline{\lambda}\partial_m\tilde{\mathscr{L}}$$
$$+ \frac{i}{\kappa^2}(\lambda\sigma^m\partial^n\overline{\lambda} - \partial^n\lambda\sigma^m\overline{\lambda})T_{mn} + \cdots \quad \mathbf{(26.22)}$$

の形になる．低エネルギーで，ゴールドスティノはエネルギー・運動量テンソル T_{mn} に結合して，対称性の破れの詳細には依存しない．

文　献

E. A. Ivanov and A. A. Kapustnikov, J. Phys. **A11**, 2375 (1978).
S. Samuel and J. Wess, Nucl. Phys. **B221**, 153 (1983).

重要な式

$$\begin{aligned} \delta_\xi \lambda_\alpha(x) &= \frac{1}{\kappa}\xi_\alpha - iv_\xi^m(x)\partial_m \lambda_\alpha(x) \\ \delta_\xi \overline{\lambda}_{\dot\alpha}(x) &= \frac{1}{\kappa}\overline{\xi}_{\dot\alpha} - iv_\xi^m(x)\partial_m \overline{\lambda}_{\dot\alpha}(x) \\ v_\xi^m(x) &= \kappa[\lambda(x)\sigma^m\overline{\xi} - \xi\sigma^m\overline{\lambda}(x)] \end{aligned} \tag{26.1}$$

$$\begin{aligned} D_\beta \Lambda_\alpha &= \frac{1}{\kappa}\varepsilon_{\alpha\beta} + i\kappa\sigma_{\alpha\dot\beta}{}^m\overline{\Lambda}^{\dot\beta}\partial_m\Lambda_\alpha \\ \overline{D}_{\dot\beta}\Lambda_\alpha &= -i\kappa\Lambda^\beta\sigma_{\beta\dot\beta}{}^m\partial_m\Lambda_\alpha \end{aligned} \tag{26.5}$$

$$\delta_\xi f(x) = -iv_\xi^n(x)\frac{\partial}{\partial x^n}f(x) \tag{26.6}$$

$$\begin{aligned} D_\alpha F &= i\kappa(\sigma^m\overline{\Lambda})_\alpha\partial_m F \\ \overline{D}_{\dot\alpha} F &= -i\kappa(\Lambda\sigma^m)_{\dot\alpha}\partial_m F \end{aligned} \tag{26.8}$$

$$\mathscr{L}_0 = -\frac{\kappa^2}{2}\int d^2\theta d^2\overline{\theta}\Lambda^2\overline{\Lambda}^2 \tag{26.15}$$

$$\mathscr{L} = \kappa^4\int d^2\theta d^2\overline{\theta}\Lambda^2\overline{\Lambda}^2\tilde{\mathscr{L}} \tag{26.18}$$

$$\begin{aligned} \mathscr{L} = &-\frac{1}{2\kappa^2} - i\lambda\sigma^m\partial_m\overline{\lambda} + \frac{i}{\kappa^2}\lambda\sigma^m\overline{\lambda}\partial_m\tilde{\mathscr{L}} \\ &+ \frac{i}{\kappa^2}(\lambda\sigma^m\partial^n\overline{\lambda} - \partial^n\lambda\sigma^m\overline{\lambda})T_{mn} + \cdots \end{aligned} \tag{26.22}$$

演　習

(1)　式 (26.2) が拘束 (26.5) を満たすことを示せ．

(2)　標準表現に対する変換則 (26.6) が超対称代数の中で閉じることを検証せよ．

(3)　式 (26.7) が拘束 (26.8) の解であることを証明せよ．

(4)　式 (26.15) が，成分場で展開されると式 (11.11) に一致することを示せ．

(5)　ラグランジアン (26.21) は超対称である．なぜならば，超場の微分は依然超場である．しかし，標準表現の微分は標準表現ではない．付録 F とここで導入した手

法を使って，標準表現の変換性を保存する“共変微分”Δ を見つけよ．ラグランジアン

$$\mathscr{L} = \int d^2\theta d^2\overline{\theta}\Lambda^2\overline{\Lambda}^2\left[-\frac{1}{2}\Delta_m A\Delta^m A - \frac{1}{2}m^2A^2 \right.$$
$$\left. - i\Psi\sigma^m\Delta_m\overline{\Psi} - \frac{1}{2}\mu(\Psi^2 + \overline{\Psi}^2)\right]$$

は，式 (26.20) のもう一つ可能な拡張である．それは，式 (26.21) と λ の高次項が異なる．もしベクトル超場が標準表現に属するならば，内部対称性をゲージ化するときに，微分 Δ を使うことが自然である．

(6)　式 (26.21) が成分場では式 (26.22) に帰着することを示せ．

付録 A.　　表記法とスピノル代数

本書を通じて用いるメトリックは，$\eta_{mn} \sim (-1,1,1,1)$ である．さらに，ファンデルヴェルデン（Van der Waerden）表示のワイル・スピノルを使う．

はじめに，M を行列式の値が 1 の 2 行 2 列の行列と定義する．$M \in \mathrm{SL}(2,\mathrm{C})$．行列 M，その複素共役 M^*，その転置逆行列 $(M^T)^{-1}$，そのエルミート共役逆行列 $(M^+)^{-1}$，すべてが $\mathrm{SL}(2,\mathrm{C})$ を表現する．それらが，2 成分ワイル・スピノルに対するローレンツ群の作用を表現する．

上付，または，下付，点付，または，点なしの 2 成分スピノルは，M のもとで次のように変換する．

$$
\begin{aligned}
\psi'_\alpha &= M_\alpha{}^\beta \psi_\beta, & \overline{\psi}_{\dot\alpha}{}' &= M^*{}_{\dot\alpha}{}^{\dot\beta}\overline{\psi}_{\dot\beta} \\
\psi'^\alpha &= M^{-1}{}_\beta{}^\alpha \psi^\beta, & \overline{\psi}'^{\dot\alpha} &= (M^*)^{-1}{}_{\dot\beta}{}^{\dot\alpha}\overline{\psi}^{\dot\beta}.
\end{aligned}
\tag{A.1}
$$

スピノルはギリシャ添字で記す．点付添字のスピノルはローレンツ群の $(0,1/2)$ 表現のもとで変換し，点なし添字のそれは $(1/2,0)$ 共役表現のもとで変換する．

$\mathrm{SL}(2,\mathrm{C})$ とローレンツ群の関連は，σ–行列を通じて付けられ，

$$
\begin{aligned}
\sigma^0 &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, & \sigma^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
\sigma^2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, & \sigma^3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{A 2}
$$

で，SU(2) と回転群の間の関係に完全に類似している．σ–行列は，2×2 複素行列に対する基底である．

$$
P = P_m \sigma^m = \begin{pmatrix} -P_0 + P_3 & P_1 - iP_2 \\ P_1 + iP_2 & -P_0 - P_3 \end{pmatrix}. \tag{A.3}
$$

任意のエルミート行列は実の P_m で展開できる．任意のエルミート行列 P から，次の変換

$$P' = MPM^+ \tag{A.4}$$

でもう一つ別のを常につくれる．P と P' は σ で展開されて，

$$\sigma^m P'_m = M\sigma^m P_m M^+. \tag{A.5}$$

M はユニモジュラー（$\det M = 1$）なので，係数 P_m と P'_m はローレンツ変換で結びつけられ，

$$\det[\sigma^m P'_m] = \det[\sigma^m P_m] = P_0'^2 - \mathbf{P}'^2 = P_0^2 - \mathbf{P}^2. \tag{A.6}$$

ベクトルとテンソルはラテン添字によってスピノルと識別される．

式 (A.1) と式 (A.5) から σ^m が次の添字構造をもつことがわかる．

$$\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}{}^m. \tag{A.7}$$

この便法から，$\psi^\alpha\psi_\alpha$, $\overline{\psi}_{\dot{\alpha}}\overline{\psi}^{\dot{\alpha}}$, $\psi^\alpha\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}{}^m\partial_m\overline{\psi}^{\dot{\alpha}}$ すべてがローレンツ・スカラーである．

M がユニモジュラーなので反対称テンソル $\varepsilon^{\alpha\beta}$ と $\varepsilon_{\alpha\beta}$ ($\varepsilon_{21} = \varepsilon^{12} = 1$, $\varepsilon_{12} = \varepsilon^{21} = -1$, $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 0$) はローレンツ変換

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\beta} &= M_\alpha{}^\gamma M_\beta{}^\delta \varepsilon_{\gamma\delta} \\ \varepsilon^{\alpha\beta} &= \varepsilon^{\gamma\delta} M_\gamma{}^\alpha M_\delta{}^\beta \end{aligned} \tag{A.8}$$

のもとで不変である．上付，下付の添字は ε–テンソルで関係付けられる．

$$\psi^\alpha = \varepsilon^{\alpha\beta}\psi_\beta, \qquad \psi_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta}\psi^\beta. \tag{A.9}$$

$\varepsilon^{\alpha\beta}$ と $\varepsilon_{\alpha\beta}$ を $\varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon^{\beta\gamma} = \delta_\alpha{}^\gamma$ と定義したことに留意せよ．点付 ε–テンソルに関してもまったく同様である．

ε–テンソルは，また，σ–行列の添字を上げるのにも使われて，

$$\overline{\sigma}^{m\dot{\alpha}\alpha} = \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\varepsilon^{\alpha\beta}\sigma^m{}_{\beta\dot{\beta}}. \tag{A.10}$$

σ–行列の定義から，

$$(\sigma^m\overline{\sigma}^n + \sigma^n\overline{\sigma}^m)_\alpha{}^\beta = -2\eta^{mn}\delta_\alpha{}^\beta$$
$$(\overline{\sigma}^m\sigma^n + \overline{\sigma}^n\sigma^m)^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta} = -2\eta^{mn}\delta^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta}. \tag{A.11}$$

同様に，次の完備関係

$$\mathrm{Tr}\,\sigma^m\overline{\sigma}^n = -2\eta^{mn}$$
$$\sigma_{\alpha\dot\alpha}{}^m\overline{\sigma}_m{}^{\dot\beta\beta} = -2\delta_\alpha{}^\beta\delta_{\dot\alpha}{}^{\dot\beta} \tag{A.12}$$

を得る．これらの関係は，ベクトルをバイスピノル（bispinor）に，あるいはその逆に，変えるのに使われる．

$$v_{\alpha\dot\alpha} = \sigma_{\alpha\dot\alpha}{}^m v_m, \qquad v^m = -\frac{1}{2}\overline{\sigma}^{m\dot\alpha\alpha}v_{\alpha\dot\alpha}. \tag{A.13}$$

スピノル表現でのローレンツ群の生成子は

$$\sigma^{nm}{}_\alpha{}^\beta = \frac{1}{4}(\sigma_{\alpha\dot\alpha}{}^n\overline{\sigma}^{m\dot\alpha\beta} - \sigma_{\alpha\dot\alpha}{}^m\overline{\sigma}^{n\dot\alpha\beta})$$
$$\overline{\sigma}^{nm\dot\alpha}{}_{\dot\beta} = \frac{1}{4}(\overline{\sigma}^{n\dot\alpha\alpha}\sigma_{\alpha\dot\beta}{}^m - \overline{\sigma}^{m\dot\alpha\alpha}\sigma_{\alpha\dot\beta}{}^n) \tag{A.14}$$

で与えられる．σ–行列を含む役に立つ関係式は

$$\overline{\sigma}^a\sigma^b\overline{\sigma}^c - \overline{\sigma}^c\sigma^b\overline{\sigma}^a = -2i\varepsilon^{abcd}\overline{\sigma}_d$$
$$\sigma^a\overline{\sigma}^b\sigma^c - \sigma^c\overline{\sigma}^b\sigma^a = 2i\varepsilon^{abcd}\sigma_d. \tag{A.15}$$

ここで $\varepsilon_{0123} = -1$．同様に

$$\sigma^a\overline{\sigma}^b\sigma^c + \sigma^c\overline{\sigma}^b\sigma^a = 2(\eta^{ac}\sigma^b - \eta^{bc}\sigma^a - \eta^{ab}\sigma^c)$$
$$\overline{\sigma}^a\sigma^b\overline{\sigma}^c + \overline{\sigma}^c\sigma^b\overline{\sigma}^a = 2(\eta^{ac}\overline{\sigma}^b - \eta^{bc}\overline{\sigma}^a - \eta^{ab}\overline{\sigma}^c). \tag{A.16}$$

そして

$$\sigma_{\alpha\dot\alpha}{}^n\sigma_{\beta\dot\beta}{}^m - \sigma_{\alpha\dot\alpha}{}^m\sigma_{\beta\dot\beta}{}^n = 2[(\sigma^{nm}\varepsilon)_{\alpha\beta}\varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta} + (\varepsilon\overline{\sigma}^{nm})_{\dot\alpha\dot\beta}\varepsilon_{\alpha\beta}]$$
$$\sigma_{\alpha\dot\alpha}{}^n\sigma_{\beta\dot\beta}{}^m + \sigma_{\alpha\dot\alpha}{}^m\sigma_{\beta\dot\beta}{}^n = -\eta^{nm}\varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta} + 4(\sigma^{\ell n}\varepsilon)_{\alpha\beta}(\varepsilon\overline{\sigma}^{\ell m})_{\dot\alpha\dot\beta}. \tag{A.17}$$

式 (A.11) は，2 成分スピノルを 4 成分スピノルに簡単に関係付ける．これは，ディラック γ–行列の次の表現を通じて行われる．

$$\gamma^m = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^m \\ \overline{\sigma}^m & 0 \end{pmatrix}. \tag{A.18}$$

これをワイル基底（Weyl basis）とよぶ．この基底では，ディラック・スピノルは，2 個のワイル・スピノルを含む．

$$\Psi_D = \begin{pmatrix} \chi_\alpha \\ \overline{\psi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}. \tag{A.19}$$

一方，マジョラナ・スピノルは 1 個だけを含む．

$$\Psi_M = \begin{pmatrix} \chi_\alpha \\ \overline{\chi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}. \tag{A.20}$$

本書では一貫して次のスピノル和の約束を用いる．

$$\begin{aligned} \psi\chi &= \psi^\alpha \chi_\alpha = -\psi_\alpha \chi^\alpha = \chi^\alpha \psi_\alpha = \chi\psi \\ \overline{\psi}\overline{\chi} &= \overline{\psi}_{\dot{\alpha}} \overline{\chi}^{\dot{\alpha}} = -\overline{\psi}^{\dot{\alpha}} \overline{\chi}_{\dot{\alpha}} = \overline{\chi}_{\dot{\alpha}} \overline{\psi}^{\dot{\alpha}} = \overline{\chi}\overline{\psi}. \end{aligned} \tag{A.21}$$

ここで仮定したことは，いつものように，スピノルは反交換するということである．$\overline{\psi}\,\overline{\chi}$ の定義は次のように選ばれる．

$$(\chi\psi)^+ = (\chi^\alpha \psi_\alpha)^+ = \overline{\psi}_{\dot{\alpha}} \overline{\chi}^{\dot{\alpha}} = \overline{\psi}\overline{\chi} = \overline{\chi}\overline{\psi}. \tag{A.22}$$

共役が，スピノルの順番を変えることに留意せよ．

文　献

E. M. Corson, “Introduction to Tensors, Spinors and Relativistic Wave Equations,” London, Blackie and Son (1953).
W. Thirring, Supplemento del Nuovo Cimento **14**, no. 2, 415 (1959).

演　習

(1)　$M = \exp\{(1/2)i\phi\sigma_3\}$，$M = \exp\{(1/2)\chi\sigma_3\}$ に対して，式 (A.5) の P'_m を計算せよ．

(2)　M と $(M^T)^{-1}$ が，SL(2, C) の等しい表現を形成することを示せ．

(3)　次の演算をせよ．

$$\overline{\sigma}^0 = \sigma^0$$
$$\overline{\sigma}^{1,2,3} = -\sigma^{1,2,3}.$$

(4) 式 (A.11) と式 (A.12) を証明せよ.

(5) 次式を示せ.

$$\sigma^{mn}{}_{\alpha}{}^{\alpha} = 0$$
$$\sigma^{mn}{}_{\alpha}{}^{\beta}\varepsilon_{\beta\gamma} = \sigma^{mn}{}_{\gamma}{}^{\beta}\varepsilon_{\beta\alpha}.$$

(6) 次式を証明せよ.

$$\varepsilon^{abcd}\sigma_{cd} = -2i\sigma^{ab}$$
$$\varepsilon^{abcd}\overline{\sigma}_{cd} = 2i\overline{\sigma}^{ab}.$$

(7) ワイル基底では

$$\gamma^5 = \gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

となることを計算せよ.

(8) ディラック γ–行列の正準（canonical）基底

$$\gamma_C^0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \gamma_C^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{pmatrix}$$

は，式 (A.18) のワイル基底と次の相似変換

$$\Gamma_W = X\Gamma_C X^{-1}, \qquad X = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

で関係付けられることを示せ．また，マジョラナ基底，$\gamma_M^{n*} = -\gamma_M^n$,

$$\gamma_M^0 = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^2 \\ -\sigma^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_M^1 = \begin{pmatrix} 0 & i\sigma^3 \\ i\sigma^3 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\gamma_M^2 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \qquad \gamma_M^3 = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma^1 \\ -i\sigma^1 & 0 \end{pmatrix}$$

は，式 (A.18) のワイル基底と次の相似変換

$$\Gamma_W = Y\Gamma_M Y^{-1}, \qquad Y = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & i \\ \varepsilon & -i\varepsilon \end{pmatrix}$$

で関係付けられることを示せ.

(9)　Ψ_M をワイル基底でのマジョラナ・スピノル,

$$\Psi_M = \begin{pmatrix} \chi_\alpha \\ \overline{\chi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}$$

とする. これを演習 (8) のマジョラナ基底に変更せよ.

$$\Psi_M \to \sqrt{2} \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\ \chi_\alpha \\ \mathrm{Im}\ \chi_\alpha \end{pmatrix}.$$

(10)　次の関係式を証明せよ.

$$\begin{aligned} \theta^\alpha \theta^\beta &= -\frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta}\theta\theta \\ \theta_\alpha \theta_\beta &= \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta}\theta\theta \\ \overline{\theta}^{\dot{\alpha}} \overline{\theta}^{\dot{\beta}} &= \frac{1}{2}\varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\overline{\theta}\,\overline{\theta} \\ \overline{\theta}_{\dot{\alpha}} \overline{\theta}_{\dot{\beta}} &= -\frac{1}{2}\varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\overline{\theta}\,\overline{\theta} \\ \theta\sigma^m\overline{\theta}\theta\sigma^n\overline{\theta} &= -\frac{1}{2}\theta\theta\overline{\theta}\,\overline{\theta}\eta^{mn}. \end{aligned}$$

(11)　演習 (10) を用いて次式を示せ.

$$\begin{aligned} (\theta\phi)(\theta\psi) &= -\frac{1}{2}(\phi\psi)(\theta\theta) \\ (\overline{\theta}\,\overline{\phi})(\overline{\theta}\,\overline{\psi}) &= -\frac{1}{2}(\overline{\phi}\,\overline{\psi})(\overline{\theta}\,\overline{\theta}). \end{aligned}$$

(12)　次式を証明せよ.

$$\mathrm{Tr}\,\sigma^{mn}\sigma^{k\ell} = -\frac{1}{2}(\eta^{mk}\eta^{n\ell} - \eta^{m\ell}\eta^{nk}) - \frac{1}{2}\varepsilon^{mnk\ell}.$$

ここで, $\varepsilon_{0123} = -1$.

(13)　超対称代数 (I) を, 4 成分マジョラナ・スピノルで書き直せ.

$$\begin{aligned} \{Q_\alpha, \overline{Q}_\beta\} &= 2\gamma^m_{\alpha\beta}P_m \\ [Q_\alpha, P_m] &= [\overline{Q}_\alpha, P_m] = 0. \end{aligned}$$

付録B.　　スピノル代数のまとめ

表記（convention）：

$$\eta_{mn} \sim (-1,1,1,1)$$
$$\varepsilon_{21} = \varepsilon^{12} = 1, \qquad \varepsilon_{12} = \varepsilon^{21} = -1, \qquad \varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 0$$
$$\varepsilon_{0123} = -1$$
$$\psi^{\alpha} = \varepsilon^{\alpha\beta}\psi_{\beta}, \qquad \psi_{\alpha} = \varepsilon_{\alpha\beta}\psi^{\beta}$$
$$\psi\chi = \psi^{\alpha}\chi_{\alpha} = -\psi_{\alpha}\chi^{\alpha} = \chi^{\alpha}\psi_{\alpha} = \chi\psi$$
$$\overline{\psi}\overline{\chi} = \overline{\psi}_{\dot{\alpha}}\overline{\chi}^{\dot{\alpha}} = -\overline{\psi}^{\dot{\alpha}}\overline{\chi}_{\dot{\alpha}} = \overline{\chi}_{\dot{\alpha}}\overline{\psi}^{\dot{\alpha}} = \overline{\chi}\overline{\psi}$$
$$(\chi\psi)^{+} = (\chi^{\alpha}\psi_{\alpha})^{+} = \overline{\psi}_{\dot{\alpha}}\overline{\chi}^{\dot{\alpha}} = \overline{\psi}\overline{\chi} = \overline{\chi}\overline{\psi} \tag{B.1}$$
$$\Psi_D = \begin{pmatrix} \chi_{\alpha} \\ \overline{\psi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}$$
$$\gamma^m = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^m \\ \overline{\sigma}^m & 0 \end{pmatrix}$$
$$\gamma^5 = \gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

シグマ行列：

$$\sigma^0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{B.2}$$

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}^{m\dot{\alpha}\alpha} &= \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\varepsilon^{\alpha\beta}\sigma_{\beta\dot{\beta}}{}^{m} \\ \bar{\sigma}^{0} &= \sigma^{0} \\ \bar{\sigma}^{1,2,3} &= -\sigma^{1,2,3}\end{aligned} \tag{B.3}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\,\sigma^{m}\bar{\sigma}^{n} &= -2\eta^{mn} \\ \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}{}^{m}\bar{\sigma}_{m}{}^{\dot{\beta}\beta} &= -2\delta_{\alpha}{}^{\beta}\delta_{\dot{\alpha}}{}^{\dot{\beta}}\end{aligned} \tag{B.4}$$

$$\begin{aligned}(\sigma^{m}\bar{\sigma}^{n} + \sigma^{n}\bar{\sigma}^{m})_{\alpha}{}^{\beta} &= -2\eta^{mn}\delta_{\alpha}{}^{\beta} \\ (\bar{\sigma}^{m}\sigma^{n} + \bar{\sigma}^{n}\sigma^{m})^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} &= -2\eta^{mn}\delta^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}}\end{aligned} \tag{B.5}$$

$$\begin{aligned}\sigma^{mn}{}_{\alpha}{}^{\beta} &= \frac{1}{4}(\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}{}^{n}\bar{\sigma}^{m\dot{\alpha}\beta} - \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}{}^{m}\bar{\sigma}^{n\dot{\alpha}\beta}) \\ \bar{\sigma}^{nm\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} &= \frac{1}{4}(\bar{\sigma}^{n\dot{\alpha}\alpha}\sigma_{\alpha\dot{\beta}}{}^{m} - \bar{\sigma}^{m\dot{\alpha}\alpha}\sigma_{\alpha\dot{\beta}}{}^{n})\end{aligned} \tag{B.6}$$

$$\begin{aligned}\sigma^{mn}{}_{\alpha}{}^{\alpha} &= 0 \\ \sigma^{mn}{}_{\alpha}{}^{\beta}\varepsilon_{\beta\gamma} &= \sigma^{mn}{}_{\gamma}{}^{\beta}\varepsilon_{\beta\alpha}\end{aligned} \tag{B.7}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon^{abcd}\sigma_{cd} &= -2i\sigma^{ab} \\ \varepsilon^{abcd}\bar{\sigma}_{cd} &= 2i\bar{\sigma}^{ab}\end{aligned} \tag{B.8}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}{}^{n}\sigma_{\beta\dot{\beta}}{}^{m} - \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}{}^{m}\sigma_{\beta\dot{\beta}}{}^{n} &= 2[(\sigma^{nm}\varepsilon)_{\alpha\beta}\varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} + (\varepsilon\bar{\sigma}^{nm})_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\varepsilon_{\alpha\beta}] \\ \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}{}^{n}\sigma_{\beta\dot{\beta}}{}^{m} + \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}{}^{m}\sigma_{\beta\dot{\beta}}{}^{n} &= -\eta^{nm}\varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} + 4(\sigma^{\ell n}\varepsilon)_{\alpha\beta}(\varepsilon\bar{\sigma}^{\ell m})_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\end{aligned} \tag{B.9}$$

$$\mathrm{Tr}\,\sigma^{mn}\sigma^{k\ell} = -\frac{1}{2}(\eta^{mk}\eta^{n\ell} - \eta^{m\ell}\eta^{nk}) - \frac{i}{2}\varepsilon^{mnk\ell} \tag{B.10}$$

$$\begin{aligned}\sigma^{a}\bar{\sigma}^{b}\sigma^{c} + \sigma^{c}\bar{\sigma}^{b}\sigma^{a} &= 2(\eta^{ac}\sigma^{b} - \eta^{bc}\sigma^{a} - \eta^{ab}\sigma^{c}) \\ \bar{\sigma}^{a}\sigma^{b}\bar{\sigma}^{c} + \bar{\sigma}^{c}\sigma^{b}\bar{\sigma}^{a} &= 2(\eta^{ac}\bar{\sigma}^{b} - \eta^{bc}\bar{\sigma}^{a} - \eta^{ab}\bar{\sigma}^{c})\end{aligned} \tag{B.11}$$

$$\begin{aligned}\sigma^{a}\bar{\sigma}^{b}\sigma^{c} - \sigma^{c}\bar{\sigma}^{b}\sigma^{a} &= 2i\varepsilon^{abcd}\sigma_{d} \\ \bar{\sigma}^{a}\sigma^{b}\bar{\sigma}^{c} - \bar{\sigma}^{c}\sigma^{b}\bar{\sigma}^{a} &= -2i\varepsilon^{abcd}\bar{\sigma}_{d}\end{aligned} \tag{B.12}$$

スピノル代数：

$$\begin{aligned}\theta^\alpha\theta^\beta &= -\frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta}\theta\theta \\ \theta_\alpha\theta_\beta &= \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta}\theta\theta \\ \overline{\theta}^{\dot\alpha}\overline{\theta}^{\dot\beta} &= \frac{1}{2}\varepsilon^{\dot\alpha\dot\beta}\overline{\theta}\,\overline{\theta} \\ \overline{\theta}_{\dot\alpha}\overline{\theta}_{\dot\beta} &= -\frac{1}{2}\varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\overline{\theta}\,\overline{\theta}\end{aligned} \tag{B.13}$$

$$\theta\sigma^m\overline{\theta}\theta\sigma^n\overline{\theta} = -\frac{1}{2}\theta\theta\overline{\theta}\,\overline{\theta}\eta^{mn} \tag{B.14}$$

$$\begin{aligned}(\theta\phi)(\theta\psi) &= -\frac{1}{2}(\theta\psi)(\theta\theta) \\ (\overline{\theta}\,\overline{\phi})(\overline{\theta}\,\overline{\psi}) &= -\frac{1}{2}(\overline{\theta}\,\overline{\psi})(\overline{\theta}\,\overline{\theta})\end{aligned} \tag{B.15}$$

$$\varepsilon^{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial\theta^\beta} = -\frac{\partial}{\partial\theta_\alpha} \tag{B.16}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon^{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}\frac{\partial}{\partial\theta^\beta}\theta\theta &= 4 \\ \varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}_{\dot\alpha}}\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}_{\dot\beta}}\overline{\theta}\,\overline{\theta} &= 4\end{aligned} \tag{B.17}$$

$$\begin{aligned}\chi\sigma^n\overline{\psi} &= -\overline{\psi}\overline{\sigma}^n\chi, & (\chi\sigma^m\overline{\psi})^+ &= \psi\sigma^m\overline{\chi} \\ \chi\sigma^m\overline{\sigma}^n\chi &= \psi\sigma^n\overline{\sigma}^m\chi, & (\chi\sigma^m\overline{\sigma}^n\psi)^+ &= \overline{\psi}\overline{\sigma}^n\sigma^m\overline{\chi}\end{aligned} \tag{B.18}$$

$$(\psi\phi)\overline{\chi}_{\dot\beta} = -\frac{1}{2}(\phi\sigma^m\overline{\chi})(\psi\sigma^m)_{\dot\beta} \tag{B.19}$$

付録C.　ケーラー幾何

カイラル多重項の物質結合はケーラー幾何の言葉で都合よく記述される．したがって，ケーラー多様体の概念を導入するのは有益である．ケーラー多様体は，以下で議論するある条件に従う，解析的リーマン多様体の一つの特殊な型である．多様体は解析的なので複素座標 a^i，a^{*i} $(i = 1, \ldots, n)$ で媒介変数表示されうる．解析的座標変換

$$a^i = a^i(a'), \qquad a^{*i} = a^{*i}(a^{*\prime}) \tag{C.1}$$

のもとで微分（differentials）と微分係数（derivative）は次の変換をする．

$$\begin{aligned} da'^i &= \frac{\partial a'^i}{\partial a^j} da^j, \qquad & da^{*\prime i} &= \frac{\partial a^{*\prime i}}{\partial a^{*j}} da^{*j} \\ \frac{\partial}{\partial a'^i} &= \frac{\partial a^j}{\partial a'^i}\frac{\partial}{\partial a^j}, \qquad & \frac{\partial}{\partial a^{*\prime i}} &= \frac{\partial a^{*j}}{\partial a^{*\prime i}}\frac{\partial}{\partial a^{*j}}. \end{aligned} \tag{C.2}$$

これらの変換は，座標の解析性を保持する．それらは，また，共変（covariant）と反変（contravariant）のベクトル場の変換性も定義する．

$$\begin{aligned} V'_i(a', a^{*\prime}) &= \frac{\partial a^j}{\partial a'^i} V_j(a, a^*) \\ V'^i(a', a^{*\prime}) &= \frac{\partial a'^i}{\partial a^j} V^j(a, a^*) \\ V'_{i^*}(a', a^{*\prime}) &= \frac{\partial a^{*j}}{\partial a^{*\prime i}} V_{j^*}(a, a^*) \\ V'^{i^*}(a', a^{*\prime}) &= \frac{\partial a^{*\prime i}}{\partial a^{*j}} V^{j^*}(a, a^*). \end{aligned} \tag{C.3}$$

ケーラー多様体に対する最初の条件は，それがエルミートな計量（metric）g_{ij^*} を付与されていることである．計量は，正定値（positive definite）で可逆（invertible）

で，そして，添字 i，j^* を上げたり，下げたりする．

$$
\begin{aligned}
V_i &= g_{ij^*}V^{j^*}, \qquad V_{j^*} = g_{ij^*}V^i \\
V^i &= g^{ij^*}V_{j^*}, \qquad V^{j^*} = g^{ij^*}V_i.
\end{aligned}
\tag{C.4}
$$

第 2 の要請は，共変微分が解析的構造（analytic structure）を尊重することである．これは，$\Gamma^{k^*}_{ij} = \Gamma^{k^*}_{i^*j} = 0$ を意味するので，共変微分は次の形である．

$$
\begin{aligned}
\nabla_i V_j &= \frac{\partial}{\partial a^i}V_j - \Gamma^k_{ij}V_k \\
\nabla_{i^*} V_j &= \frac{\partial}{\partial a^{*i}}V_j - \Gamma^k_{i^*j}V_k.
\end{aligned}
\tag{C.5}
$$

第 3 の条件は，接続（connection）がエルミートな計量と両立することである．これは，追加的な制限

$$
\nabla_k g_{ij^*} = 0, \qquad \nabla_{k^*} g_{ij^*} = 0 \tag{C.6}
$$

をもち込む．

接続の変換則は，テンソルの共変微分がテンソルとして変換することを保証するように選ばれる．これは，

$$
\begin{aligned}
\Gamma'^k_{ij} &= \frac{\partial a^\ell}{\partial a'^i}\frac{\partial a^m}{\partial a'^j}\frac{\partial a'^k}{\partial a^n}\Gamma^n_{\ell m} + \frac{\partial^2 a^n}{\partial a'^i \partial a'^j}\frac{\partial a'^k}{\partial a^n} \\
\Gamma'^k_{i^*j} &= \frac{\partial a^{*\ell}}{\partial a^{*\prime i}}\frac{\partial a^m}{\partial a'^j}\frac{\partial a'^k}{\partial a^n}\Gamma^n_{\ell^* m}
\end{aligned}
\tag{C.7}
$$

を意味する．式 (C.7) の最初の式は，捩率をゼロにして，接続の対称部分のみを残すことと矛盾しない．

$$
\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}. \tag{C.8}
$$

2 番目の式は，

$$
\Gamma^k_{i^*j} = 0 \tag{C.9}
$$

の要求が許されることを意味している．式 (C.8) と式 (C.9) はケーラー多様体を定義する残りの二つの仮定である．

ケーラー多様体上では，上で議論された条件は，接続の中で消えない成分は Γ^i_{jk} とその複素共役 $\Gamma^{i^*}_{j^*k^*}$ だけであることを意味している．式 (C.6) は解くことができて，

$$\Gamma^k_{ij} = g^{k\ell^*}\frac{\partial}{\partial a^i}g_{j\ell^*} \tag{C.10}$$

を与える．

$$\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji} \tag{C.11}$$

であるから，計量は次の可積分条件に従わなければならない．

$$\frac{\partial}{\partial a^k}g_{ij^*} = \frac{\partial}{\partial a^i}g_{kj^*}. \tag{C.12}$$

共役な微分に対して同様な関係が成り立つ．

$$\frac{\partial}{\partial a^{*k}}g_{ij^*} = \frac{\partial}{\partial a^{*j}}g_{ik^*}. \tag{C.13}$$

式 (C.12)，(C.13) は，計量が，スカラー関数 K の微分

$$g_{ij^*} = \frac{\partial}{\partial a^i}\frac{\partial}{\partial a^{*j}}K(a,a^*) \tag{C.14}$$

であることを意味している．関数 K をケーラー・ポテンシャルとよばれ，その微分が計量と接続を決める．ケーラー多様体はしばしば (C.14) を通じて**定義される**．

ケーラー・ポテンシャルは，ケーラー幾何を完全に詳述する．計量 g_{ij^*} が，K の解析的なシフト

$$K(a,a^*) \to K(a,a^*) + F(a) + F^*(a^*) \tag{C.15}$$

のもとで，不変であることに留意せよ．このようなシフトはケーラー・ポテンシャルのケーラー変換とよばれる．

ケーラー多様体の曲率は二つの共変微分の交換子として定義される．

$$\begin{aligned} [\nabla_i,\nabla_j]V_k &= R^\ell_{ijk}V_\ell \\ [\nabla_i,\nabla_{j^*}]V_k &= R^\ell_{ij^*k}V_\ell. \end{aligned} \tag{C.16}$$

R の上付添字は計量で下げられて，

$$\begin{aligned} R_{ijk\ell^*} &= g_{m\ell^*}R^m_{ijk} \\ R_{ij^*k\ell^*} &= g_{m\ell^*}R^m_{ij^*k} \end{aligned} \tag{C.17}$$

を与える．演習 (3) で $R_{ij^*k\ell^*}$ とその複素共役だけが消えないことがわかる．共変微分の定義から

$$R_{ij^*k\ell^*} = g_{m\ell^*} \frac{\partial}{\partial a^{*j}} \Gamma^m_{ik}$$
$$= \frac{\partial}{\partial a^i} \frac{\partial}{\partial a^{*j}} g_{k\ell^*} - g^{mn^*} \left(\frac{\partial}{\partial a^{*j}} g_{m\ell^*} \right) \left(\frac{\partial}{\partial a^i} g_{kn^*} \right) \qquad \text{(C.18)}$$

を得る．式 (C.16)，(C.17)，(C.18) を使って曲率が次の対称性をもつことを示すのは難しくない．

$$R_{ij^*k\ell^*} = -R_{ij^*\ell^*k} = -R_{j^*ik\ell^*} = R_{j^*i\ell^*k}. \qquad \text{(C.19)}$$

これが，カイラル場のゲージ結合を議論するのに必要なケーラー幾何のすべてである．

文　　献

M. Bordemann, M. Forger, and H. Romer, Commun Math. Phys. **102**, 605 (1986).
K. Itoh, T. Kugo, and H. Kunitomo, Nucl. Phys. **B263**, 295 (1986).

演　　習

(1) 接続 Γ に対して変換則 (C.7) を証明せよ．

(2) ケーラー条件 (C.8) と (C.9) を代入して，計量を使って接続について解け．

(3) $R_{ij^*k\ell^*}$ だけが，ケーラー多様体上の消えない成分であることを示して，計量を使って曲率について解け．

(4) ケーラー・ポテンシャル $K = -3\log\{1 - (1/3)a^{*i}a^i\}$ をもつ多様体に対して曲率，リッチ・テンソル，スカラー曲率を計算せよ．

(5) 微分形式の言葉を使って，ケーラー条件 (C.14) は，基本形式，

$$\Omega = \frac{i}{2} g_{ij^*} da^i da^{*j}$$

が閉じ，

$$d\Omega = 0$$

という表現と等価であることを示せ．

付録 D.　等長変換とケーラー幾何

本章では，ケーラー多様体の等長変換（isometry）について議論する．導入される手法は平坦空間と曲がっている空間でゲージ不変な物質結合を構築するのに役に立つことがわかるであろう．われわれは，ケーラー多様体に特化する前に，まず等長変換群の一般的概念を定義する．したがって，任意の可微分多様体 $\mathscr{M}$ と，交差することなく多様体を満たす媒介変数表示された一組の曲線とを考える．その後，写像 $\phi_t : \mathscr{M} \to \mathscr{M}$（各点 $p \in \mathscr{M}$ を通る唯一の曲線に沿って媒介変数距離 t だけ移す）を考える．この写像は，また，接空間上に写像を誘起する．もし，誘起写像（induced map）が計量を変えないならば，写像 ϕ_t を多様体 $\mathscr{M}$ の**等長変換**（*isometry*），という．等長変換の組は群を形成し，$\mathscr{M}$ の等長変換群（isometry group）とよばれる．

曲線とベクトルは幾何学的な物に密接に関係付けられる．実座標 $x^i = x^i(t)$ で記述される曲線 λ と，可微分関数 $f : \mathscr{M} \to \mathbb{R}$ を考える．f の曲線 λ に沿う無限小微分（differential derivative）は，

$$\frac{df}{dt} = \frac{dx^i}{dt}\frac{\partial f}{\partial x^i} \equiv Xf \tag{D.1}$$

で与えられ，演算子

$$X = \frac{dx^i}{dt}\frac{\partial}{\partial x^i} \tag{D.2}$$

は，任意の関数 f を，λ に沿うその方向微分（directional derivative）に写像する．数学的な言語では，X はベクトルとよばれ，dx^i/dt はその成分である．演算子 X は曲がった空間への接ベクトルの一般化である．

ベクトルのこの定義は，空間を満たす曲線の組へも同様に応用できる．成分 dx^i/dt は $\mathscr{M}$ 上の関数になり，$X \equiv (dx^i/dt)\partial/\partial x^i$ はベクトル**場**（vector *field*）として知られる．

換言すれば，$\mathscr{M}$ 上に連続関数 X^i の組が与えられると，それに付随する**積分曲線**

（*integral curves*） $x^i(t)$ の組を微分方程式

$$\frac{dx^i}{dt} = X^i \tag{D.3}$$

の解として常に決めることができる．対応するベクトル場は，ちょうど $X = X^i\partial/\partial x^i$ である．

式 (D.3) の解は唯一であるから，局所的に曲線が交わることは決してない．式 (D.3) は多様体 $\mathscr{M}$ の各点で成り立つので巨視的にも十分に定義されている．

このように，空間を満たす曲線の組が，ベクトル場 X と 1 対 1 対応であることをみた．写像 ϕ_t は，X で定義される積分曲線に沿った運動を定義する．

多様体のそれ自身上への任意の写像の常として，ϕ_t は接空間でベクトルの間の写像を誘起する．誘起写像が，積分曲線に沿った異なる点でのベクトルを比較することを可能にする．それをあらわに構成するために，x^i が点 p の座標を，x'^i が点 p' の座標を表すとする．次に，Y がベクトル場で，点 p での成分を $Y^i(x)$ とする．点 p での成分 $Y^i(x)$ は点 p' での成分 $\tilde{Y}^i(x')$ に次のように写像される．

$$\tilde{Y}^i(x') = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} Y^j(x(x')). \tag{D.4}$$

式 (D.4) が，点 p でのベクトルの点 p' でのベクトルへの写像を定義する．それはしばしば，**リー移動**（*Lie transport*）とよばれリー移動されたベクトル場

$$\tilde{Y} \equiv \tilde{Y}^i(x')\frac{\partial}{\partial x'^i} \tag{D.5}$$

は，積分曲線に沿ってすべての点 p' に対して定義される．無限小（$x'^i = x^i + X^i\delta t$）では，式 (D.4) は

$$\tilde{Y}^i(x') = Y^i(x') + \frac{\partial X^i}{\partial x^j} Y^j \delta t - \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} X^j \delta t \tag{D.6}$$

に帰着し，新しい場 $\tilde{Y}$ は Y に無限に近い．

$\tilde{Y}$ と Y は両方とも同一点で定義されるので，それらの差をとること，そして，X に関して Y の**リー微分**（*Lie derivative*），

$$\begin{aligned}(\mathscr{L}_X Y)^i &\equiv \lim_{\delta t \to 0} \frac{Y^i(x') - \tilde{Y}^i(x')}{\delta t} \\ &= X^j \frac{\partial}{\partial x^j} Y^i - Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} X^i\end{aligned}$$

$$\equiv [X, Y]^i \tag{D.7}$$

を構成することは意味がある．二つのベクトル場のリー微分は多様体 $\mathscr{M}$ 上に第 3 のベクトル場を与える．

同様な論理を用いて，リー微分の定義は任意のほかのテンソル場に対して一般化できる．例えば，式 (D.4) に類似の表現は，共変ベクトル場のリー微分は次のようになることを意味する．

$$(\mathscr{L}_X Y)_i = X^j \frac{\partial}{\partial x^j} Y_i + Y_j \frac{\partial}{\partial x^i} X^j. \tag{D.8}$$

同様にして，計量のリー微分は

$$\begin{aligned}(\mathscr{L}_X g)_{ij} &= X^k \frac{\partial}{\partial x^k} g_{ij} + g_{ik} \frac{\partial}{\partial x^j} X^k + g_{jk} \frac{\partial}{\partial x^i} X^k \\ &= \nabla_i X_j + \nabla_j X_i\end{aligned} \tag{D.9}$$

で与えられる．ここで $X_i = g_{ij} X^j$ で，$\nabla_i X_j = \partial_i X_j - \Gamma^k{}_{ij} X_k$ は計量 g_{ij} と両立する捩率のゼロの接続を含んでいる．

もし，リー微分がゼロならば，場はリー移動のもとで**不変**（*invariant*）である．もし，メトリックが不変であれば，あるベクトル場 X に対して

$$(\mathscr{L}_X g)_{ij} = \nabla_i X_j + \nabla_j X_i = 0. \tag{D.10}$$

この場合，X は多様体 $\mathscr{M}$ の**等長変換**（*isometry*）を生成する．それは，**キリング・ベクトル場**（*Killing Vector field*）とよばれ，式 (D.10) はキリングの方程式として知られている．

キリング・ベクトルは多様体の連続変換を生成する．これらの対称性は，等長変換群で閉じる．実際，二つのキリング・ベクトルのリー括弧は，別のキリング・ベクトルを与える．

$$\left[X^{(a)}, X^{(b)}\right] = -f^{abc} X^{(c)}. \tag{D.11}$$

ここで，f^{abc} は等長変換群 G の**構造定数**（*structure constant*）である．

さて，われわれの多様体は，メトリックが g_{ij^*} で，複素座標が a^i，a^{*i} であるケーラー多様体であると仮定しよう．われわれは，多様体の解析的性質を保存す

る解析的等長変換に注意を集中する．これは，付随するキリング・ベクトルが正則（holomorphic）なベクトル場であることを要求する．

$$X^{(b)} = X^{i(b)}(a)\frac{\partial}{\partial a^i}$$
$$X^{*(b)} = X^{*i(b)}(a^*)\frac{\partial}{\partial a^{*i}}. \tag{D.12}$$

添字 (b) はキリング・ベクトルを表し，等長変換群 G の次元 d 上を走る．

$X^{(a)}$ は正則であるので，キリングの方程式 (D.10) は次の形に帰着する．

$$\nabla_i X_j^{(a)} + \nabla_j X_i^{(a)} = 0$$
$$\nabla_{i^*} X_j^{(a)} + \nabla_j X_i^{*(a)} = 0. \tag{D.13}$$

共変微分の定義から，ケーラー多様体上では，最初の方程式は自動的に満たされる．2 番目は，可積分条件である．すなわち，

$$g_{ij^*} X^{*j(a)} = i\frac{\partial}{\partial a^i} D^{(a)}$$
$$g_{ij^*} X^{i(a)} = -i\frac{\partial}{\partial a^{*i}} D^{(a)} \tag{D.14}$$

のような d 個の実スカラー関数 $D^{(a)}(a, a^*)$ が存在するということと，それは局所的に等価である．$D^{(a)}$ はキリング・ポテンシャルとして知られ，定数 $c^{(a)}$，$D^{(a)} \to D^{(a)} + c^{(a)}$ までで定義される．第 24 章で，ポテンシャルを再定義する自由度がアーベル群のファイエ–イリオポロス D 項に関係付けられることをみる．

関係式 (D.14) は逆解きできて，キリング・ベクトルがキリング・ポテンシャルで与えられ，

$$X^{i(a)} = -ig^{ij^*}\frac{\partial}{\partial a^{*j}} D^{(a)}$$
$$X^{*j(a)} = ig^{ij^*}\frac{\partial}{\partial a^i} D^{(a)}. \tag{D.15}$$

場 $X^{i(a)}$ が正則であるという要請が，$D^{(a)}$ に拘束条件を付ける．この拘束を解くことは式 (D.13) を解くことと等価である．一般的には，与えられたケーラー多様体上にキリング・ポテンシャルを発見することは難しいかもしれない．

正則構造のために，キリング・ベクトル $X^{(a)}$ と $X^{*(a)}$ は，等長変換群 G の独立な表現を生成する．それらはリー括弧関係

$$\left[X^{(a)}, X^{(b)}\right] = -f^{abc}X^{(c)}$$

$$\left[X^{*(a)}, X^{*(b)}\right] = -f^{abc}X^{*(c)} \tag{D.16}$$
$$\left[X^{(a)}, X^{*(b)}\right] = 0$$

に従う．ここで，f^{abc} は G の構造定数である．キリング・ポテンシャル $D^{(a)}$ も等長変換群のもとで変換する．演習 (3) で示すように，それらは随伴表現で変換するように選ぶことができる．

$$\left[X^{i(a)}\frac{\partial}{\partial a^i} + X^{*i(a)}\frac{\partial}{\partial a^{*i}}\right]D^{(b)} = -f^{abc}D^{(c)}. \tag{D.17}$$

ノンアーベリアン群に対しては，これが $c^{(a)}$ を決める．しかし，各 U(1) 因子には未定な定数がある．

G の等長変換のもとでのケーラー・ポテンシャルの変分にわれわれの注意を向けよう．そのような等長変換は，キリング・ベクトル $X^{(a)}$ と $X^{*(a)}$ によって生成される．

$$\delta K = \left(\varepsilon^{(a)}X^{(a)} + \varepsilon^{*(a)}X^{*(a)}\right)K. \tag{D.18}$$

われわれは，複素パラメーター $\varepsilon^{(a)}$ を使ったこと，そして，ケーラー・ポテンシャルのエルミート性が保存されていることに留意せよ．式 (D.18) が，ただちに次のように書き直せる．

$$\delta K = \varepsilon^{(a)}F^{(a)} + \varepsilon^{*(a)}F^{*(a)} - i\left(\varepsilon^{(a)} - \varepsilon^{*(a)}\right)D^{(a)}. \tag{D.19}$$

ここで，$F^{(a)} = X^{(a)}K + \imath D^{(a)}$ は座標の解析関数で，

$$\frac{\partial F^{(a)}}{\partial a^{*j}} = g_{ij^*}X^{i(a)} + i\frac{\partial D^{(a)}}{\partial a^{*j}} = 0. \tag{D.20}$$

そして，われわれは式 (D.14) を使った．実パラメーター $\varepsilon^{(a)}$ に対して，式 (D.19) はケーラー変換に帰着する．複素パラメーターに対しては，しかし，それはケーラー型ではない．K にはキリング・ポテンシャル $D^{(a)}$ に比例する変更がある．第 26 章で，これがゲージ不変な作用を構築するのに重要な役割を果たす．

文　献

N. Dragon, M. G. Schmidt, and U. Ellwanger, Nucl. Phys. **B255**, 549 (1985).
W Buchmuller and W. Lerche, Annals of Phys. **175**, 159 (1987).

演　習

(1)　二つのキリング・ベクトルのリー括弧が別の一つを与えることを示せ．

(2)　式 (D.13) の最初の方程式がケーラー多様体上では自動的に満たされること，そして，2 番目の方程式が式 (D.14) に局所的に等価であることを示せ．

(3)　式 (D.17) を満たすようにキリング・ポテンシャルを選ぶことが常に可能であることを示せ．これは，最初に左辺を a^i で微分し，それから式 (D.17) の右辺の a^i 微分を得るために上で導入した関係式を使うことによって実行できる．今度は，a^{*i} に関する微分をし，手続きをくり返すことにより証明が完了する．

(4)
$$X^{i(a)}\frac{\partial}{\partial a^i}D^{(b)} + X^{*i(b)}\frac{\partial}{\partial a^{*i}}D^{(a)} = 0$$

を示せ．

(5)　ケーラー・ポテンシャル $K = a^{*i}a^i$ をもつ多様体を考える．微分演算子

$$X^{(a)} = -ia^j T^{(a)k}{}_j \frac{\partial}{\partial a^k}$$
$$X^{*(a)} = ia^{*j} T^{(a)j}{}_k \frac{\partial}{\partial a^{*k}}$$

が実際にキリング・ベクトルであることを証明せよ．ここで $T^{(a)k}{}_j$ は式 (7.14) で与えられる．それらのリー括弧が式 (D.16) で閉じることを示せ．

(6)　ケーラー・ポテンシャルが $K = \log(1 + aa^*)$ で，キリング・ポテンシャルが

$$D^{(1)} = \frac{1}{2}\frac{a + a^*}{(1 + a^*a)}, \quad D^{(2)} = -\frac{i}{2}\frac{a - a^*}{(1 + a^*a)}, \quad D^{(3)} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1 - a^*a}{1 + a^*a}\right)$$

で与えられるとき，式 (D.15) を用いてキリング・ベクトル $X^{(a)}$ を求めよ．交換子を計算して等長変換群 G を同定せよ．

付録E.　非線形表現

非線形表現は，自発的に破れた対称性をもつ理論で重要な役割をする．それらは，カイラル力学の文脈中で最初に研究され，そこではパイオンとその相互作用を記述するのに使われた．それらは，自発的に破れた超対称性をもつ理論に応用され，そこではゴールドストン・フェルミオンに対する低エネルギー定理を導くのに使われた．この付録では，有界（compact），連結（connected），半単純（semisimple）なリー群の場合について必要な形式を展開する．これは，自発的に破れた超対称性の研究のための手引きとして供されるが，そこでは類似な結果が異なる手法を用いて証明される．

われわれは，多様体 $\mathscr{M}$ と，$\mathscr{M}$ 上での作用が

$$x' = g \cdot x \tag{E.1}$$

であるゲージ群 G をもつと仮定する．ここで，$g \in G$ で x と x' は $\mathscr{M}$ の点である．これらの変換は $\mathscr{M}$ の各近傍の座標上に G の**表現**（*realization*）を誘起する．これらの表現は明らかに線形表示（linear representation）の場合を含むが，それらはまた，適当な座標によって線形変換に帰着させることができないより一般的な場合を含む．

ある表現が与えられたとき，それが線形変換に帰着されるかどうかを知りたい．有界，連結，半単純リー代数の場合には，もし，表現が座標細片（coordinate patch）の点を不変にするならば，そのときにかぎり表現は線形化されうる（与えられた座標細片内で），という簡単な答がある．

いま，線形変換が常に原点を不変にする．それゆえ，最初の方向は自明である．そのほかの方向は，しかし，あまり明らかでない．そこで点 $x_0 \in \mathscr{M}$ が G のすべての変換のもとで不変としよう．

$$g \cdot x_0 = x_0. \tag{E.2}$$

われわれは，x_0 の近傍で変換 (E.1) を線形化する座標の組をあらわに構築する．x_0 は不変なので，それに，座標 $\vec{0}$ を割り当てる．x_0 から離れて座標の任意の組を選び，x の座標を $\vec{x}$ で表示する．これらのパラメーターで，変換 (E.1) は級数展開されて，

$$\vec{x}' = g \cdot \vec{x} \equiv D(g)\vec{x} + O(\vec{x}^2). \tag{E.3}$$

ここで，$D(g)$ は行列表現である（演習 (1) で $D(g)$ が G の行列表現であることをみる）．原点が不変なので定数項はない．今度は，われわれは点 x に新しい座標 $\vec{y}$ を次のように導入する．

$$\vec{y} = \int d\mu(g) D^{-1}(g) g \cdot \vec{x}. \tag{E.4}$$

積分は群 G 上で，有界群に対しては十分に定義される．測度 $d\mu(g)$ は，左不変と右不変であるように選ぶことができ，

$$d\mu(g_0 g) = d\mu(g g_0) = d\mu(g). \tag{E.5}$$

そして，次のように規格化される．

$$\int d\mu(g) = 1. \tag{E.6}$$

これらの便法で，容易にわかることは

$$\vec{y} = \vec{x} + O(\vec{x}^2). \tag{E.7}$$

したがって，式 (E.4) が，許される座標変化であることである．

今度は，座標 $\vec{y}$ 上の G の作用を調べよう．われわれは，

$$\begin{aligned} g_0 \cdot \vec{y} &= \int d\mu(g) D^{-1}(g) g \cdot g_0 \cdot \vec{x} \\ &= \int d\mu(g g_0) D(g_0) D^{-1}(g_0) D^{-1}(g) g \cdot g_0 \cdot \vec{x} \\ &= D(g_0) \int d\mu(g) D^{-1}(g) g \cdot \vec{x} \\ &= D(g_0) \vec{y} \end{aligned} \tag{E.8}$$

を発見する．これは，座標 $\vec{y}$ が変換 (E.1) を本当に線形化することを示す．

この構築は，群積分のふるまいに大きく依存している．十分奇妙なことに，群積分が適切に定義できない場合にも同様な結果が成り立つ．例えば，第26章でわれわれは超対称な場合を研究するが，そこでは変換の超群（supergroup）が超空間に作用する．群体積が形式的にゼロであっても，線形化条件は，依然として正しいのである．

任意の点 $x_0 \in \mathscr{M}$ が与えられ，その点を不変にしておく変換で群 H に閉じる変換は，x_0 の**安定群**（*stability group*）とよばれる．一般に，H は G の適切な部分群である．われわれは，安定群の中の変換は，点 x_0 の近傍で正確に線形に表現される変換であることをみたばかりである．

以下に続くことの準備のために，われわれの注意を $\mathscr{M}$ の部分多様体 $\mathscr{N}$ に移すが，それは点 x_0 に作用する群変換

$$x = g \cdot x_0 \tag{E.9}$$

で到達できる．明らかに $\mathscr{N}$ の点は，剰余類空間（coset space）G/H と $1:1$ 対応である．この空間は，群パラメーターで自然にパラメーター表示される．G の任意の元は

$$g = e^{-i\vec{\xi}\cdot\vec{X}} e^{-i\vec{u}\cdot\vec{T}} \tag{E.10}$$

の形に書ける．ここで $\vec{u}, \vec{\xi}$ は実パラメーターである．この表現で $\vec{T}$ は H の(エルミート) 生成子, $\vec{X}$ は H の直交補空間 (orthogonal complement) における G の生成子である．二つの元 g と $g' \in G$ は，もしそれらが**右** H 変換（*right* H transformation）によって関係付けられるならば，G/H の同一点に対応する：

$$u' = e^{-i\vec{u}'\cdot\vec{T}} \tag{E.11}$$

の形のある u' 対して，もし $g = g'u'$ ならば，$g \sim g'$．これは，剰余類（cosets）を群の元によって媒介変数表示できること，

$$v = e^{-i\vec{\xi}\cdot\vec{X}}, \tag{E.12}$$

そして $\vec{\xi}$ が剰余類空間 G/H の座標であることを意味している．

これらの表示から，元 $g_0 \in G$ は**左積**（*left*-multiplication）

$$g_0 e^{-i\vec{\xi}\cdot\vec{X}} = e^{-i\vec{\xi}'\cdot\vec{X}} e^{-i\vec{u}'\cdot\vec{T}} \tag{E.13}$$

により剰余類上に作用する．座標 $\vec{\xi}'$ は $\vec{\xi}$ と g_0 で完全に決まる．

$$g_0 : \vec{\xi} \to \vec{\xi}'(\vec{\xi}, g_0). \tag{E.14}$$

媒介変数 $\vec{u}$ も同様に計算できる．それらもまた g_0 と剰余類媒介変数 $\vec{\xi}$ で決まる．

$$g_0 : \vec{u} \to \vec{u}'(\vec{\xi}, g_0). \tag{E.15}$$

元 $g_0 = u_0 \in H$ に対して，変換 (E.14)，(E.15) を常に閉じた形（closed form）で書くことができる．それから

$$v \to u_0 v = u_0 v u_0^{-1} u_0 \equiv v' u'. \tag{E.16}$$

ここで $v' = u_0 v u_0^{-1}$，そして $u' = u_0$ である．座標 $\vec{\xi}$ では，これが意味するのは，

$$e^{-i\vec{\xi}'\ \vec{X}} = u_0 e^{-i\vec{\xi}\cdot\vec{X}} u_0^{-1}. \tag{E.17}$$

ここで $v' = u_0 v u_0^{-1}$，そして $u' = u_0$ である．座標 $\vec{\xi}$ では，これが意味するのは，

$$u_0 : \vec{\xi} \to \vec{\xi}' = D(u_0)\vec{\xi}. \tag{E.18}$$

H に含まれない変換 $g_0 \in H$ に対しては，しかし，式 (E.14)，(E.15) は一般的に閉じた形で書くことができない．

しかし，特別な場合があって，そこではこれらの変換がいっそうあらわになる．これは，G の構成関係が自己写像（automorphism），

$$\begin{aligned} \vec{T} &\to \vec{T} \\ \vec{X} &\to -\vec{X} \end{aligned} \tag{E.19}$$

を許す場合で，ここで．G/H は対称空間とよばれる．これがどのようにはたらくかをみるために，変換 v_0 を考える．

$$v \to v_0 v \equiv v' u'. \tag{E.20}$$

これは，最初に逆をとり，次に自己写像 (E.19) を応用して書かれて，

$$v \to v v_0 \equiv u'^{-1} v'. \tag{E.21}$$

この二つの表現を組み合わせて

$$
\begin{aligned}
v'^2 &= v_0 v^2 v_0 \\
u' &= v'^{-1} v_0 v
\end{aligned}
\tag{E.22}
$$

を見つける．座標 $\vec{\xi}$ で，これが意味するのは

$$
e^{-2i\vec{\xi}'\cdot\vec{X}} = v_0 e^{-2i\vec{\xi}\cdot\vec{X}} v_0. \tag{E.23}
$$

これは明白に非線形変換則である．もし，$v_0 = e^{i\vec{\xi}\cdot\vec{X}}$ とすれば $\vec{\xi}$ がゼロの変換されることに留意せよ．

いまやわれわれはこれらの結果を使って，任意の H の表現を剰余類（商空間）媒介変数 $\vec{\xi}$ を用いて G の表現に格上げできることを示す．われわれは，表現 $\tilde{D}$ で出発する．$\tilde{D}$ は $\vec{\psi}$ で張られるベクトル空間上で線形に作用し，$u_0 \in H$ に対して

$$
u_0 : \vec{\psi} \to \tilde{D}(u_0)\vec{\psi} \tag{E.24}
$$

である．次に，式 (E.15) を使ってこの変換はただちに G の表現に拡張することができて，

$$
g_0 : \vec{\psi} \to \tilde{D}(e^{-i\vec{u}'\cdot\vec{T}})\vec{\psi} \tag{E.25}
$$

変数 $\vec{u}'$ が H の元を媒介変数表示するが，それらは $\vec{\xi}$ と g_0 の関数である．式 (E.25) が実際に G の表現であることを示すために，計算すると

$$
\begin{aligned}
g_1 e^{-i\vec{\xi}\cdot\vec{X}} &= e^{-i\vec{\xi}'\cdot\vec{X}} e^{-i\vec{u}'\cdot\vec{T}} \\
g_2 e^{-i\vec{\xi}'\cdot\vec{X}} &= e^{-i\vec{\xi}''\cdot\vec{X}} e^{-i\vec{u}''\cdot\vec{T}} \\
g_2 g_1 e^{-i\vec{\xi}\cdot\vec{X}} &= e^{-i\vec{\xi}'''\cdot\vec{X}} e^{-i\vec{u}'''\cdot\vec{T}} \\
&= e^{-i\vec{\xi}''\cdot\vec{X}} e^{-i\vec{u}''\cdot\vec{T}} e^{-i\vec{u}'\cdot\vec{T}}.
\end{aligned}
\tag{E.26}
$$

これから

$$
e^{-i\vec{u}'''\cdot\vec{T}} = e^{-i\vec{u}''\cdot\vec{T}} e^{-i\vec{u}'\cdot\vec{T}} \tag{E.27}
$$

であることがわかり，これは $\tilde{D}$ が H の表現であることから

$$
\tilde{D}(e^{-i\vec{u}'''\cdot\vec{T}}) = \tilde{D}(e^{-i\vec{u}''\cdot\vec{T}})\tilde{D}(e^{-i\vec{u}'\cdot\vec{T}}) \tag{E.28}
$$

を意味する．この方法で，われわれはベクトル $\vec{\psi}$ で張られる空間上に群 G を表現できる．

変換 (E.25) は非線形表現の研究で特別な役割をする．それは，群 G の**標準表現**（*standard representation*）として知られているものとは異なる．表現は標準である．なぜならば H 上で線形になる G のどのような表現も，剰余類媒介変数 $\vec{\xi}$ を援用してこの形に帰着するからである．

これをみるために，前のように，多様体 $\mathscr{M}$ と変換の群として $\mathscr{M}$ 上に作用する群 G とを仮定する．われわれはまた，$\mathscr{M}$ のある近傍 $\mathscr{U}$ に座標 $(\vec{\xi},\vec{\chi})$ を選ぶことができ，座標 $\vec{\xi}$ は G の作用で $(\vec{0},\vec{\chi})$ から到達できる $\mathscr{U}$ の中の点を媒介変数表示する．構築 (E.8) のために，媒介変数 $\vec{\chi}$ は H のもとで線形に変換するように選ぶことができる．$\vec{\xi}$ の変換は (E.14) で完全に決められる．したがって，H 変換のもとで

$$u_0 \cdot (\vec{\xi},\vec{\chi}) = (D(u_0)\vec{\xi}, \tilde{D}(u_0)\vec{\chi}). \tag{E.29}$$

ここで $\vec{\xi}$ と $\vec{\chi}$ は，それぞれが表現 D と $\tilde{D}$ の中で変換する．

さて，G 変換のすべての組の中で $\vec{\xi}$ を 0 に変換する一つの変換

$$e^{i\vec{\xi}\cdot\vec{X}} \cdot (\vec{\xi},\vec{\chi}) = (\vec{0},\vec{\psi}) \tag{E.30}$$

が存在する．この変換はまた，$\vec{\chi}$ を $\vec{\psi}$ に写すが，われわれは多様体 $\mathscr{M}$ 上の G の作用を知っているのでそれを計算できる．媒介変数 $\vec{\psi}$ は，式 (E.29) より，H のもとで表現 $\tilde{D}$ の中で変換する．

今度は，$\mathscr{M}$ 上に新しい座標系を次のように構築しよう．点 x で出発し，座標 $(\vec{\xi},\vec{\chi})$ で媒介変数表示され，式 (E.30) のように，それを点 $(\vec{0},\vec{\psi})$ に写像せよ．

$$e^{i\vec{\xi}\cdot\vec{X}} \cdot (\vec{\xi},\vec{\chi}) = (\vec{0},\vec{\psi}). \tag{E.31}$$

それから，最初の点 x において，$(\vec{\xi},\vec{\psi})$ によって与えられている新しい座標をとる．これは多用体 $\mathscr{M}$ 上に受容可能な座標変換を定義する．なぜならば，変換 $(\vec{\xi},\vec{\chi}) \to (\vec{\xi},\vec{\psi})$ のヤコビアンが，原点の近傍で消えないからである．新しい座標系で変換 (E.31) は $e^{i\vec{\xi}\cdot\vec{X}} \cdot (\vec{\xi},\vec{\psi}) = (\vec{0},\vec{\psi})$ のように書ける．これによりわれわれは，新しい座標 $\vec{\psi}$ が標準表現として変換することを示すことができる．

$$g \cdot (\vec{\xi},\vec{\psi}) = g e^{-i\vec{\xi}\cdot\vec{X}} \cdot (\vec{0},\vec{\psi})$$

$$= e^{-i\vec{\xi}'\cdot\vec{X}} e^{-i\vec{u}'\cdot\vec{T}} \cdot (\vec{0}, \vec{\psi})$$
$$= e^{-i\vec{\xi}'\cdot\vec{X}} \cdot (\vec{0}, \tilde{D}(e^{-i\vec{u}'\cdot\vec{T}})\vec{\psi})$$
$$= (\vec{\xi}', \tilde{D}(e^{-i\vec{u}'\cdot\vec{T}})\vec{\psi}). \tag{E.32}$$

$\vec{\xi}$ と合わせて，それらは G の作用に対してとられた $\mathscr{M}$ 上の自然な座標である．

物理的な応用では，$\vec{\xi}$ と $\vec{\psi}$ は，x^m 依存場である．剰余類（商空間）座標は，G から H への自発的破れから生じるゴールドストン・ボソンの役割をする．標準表現 $\vec{\psi}$ は破れないゲージ群 H の表現で変換するその他の場を記述する．この付録では，H の任意の表現が，ゴールドストン・ボソン $\vec{\xi}$ の助けを借りて G の表現に拡大されうることをみた．

不変なラグランジアンを書き下すために，標準表現として変換する共変微分がほしい．われわれの一般的議論からそのような微分は存在しなければならない．それらを構築することが，ちょうど習ったことの直接的な応用であり，また，例証でもある．

共変微分を見つけるために，$(\vec{\xi}, \vec{\psi}, \partial_m\vec{\xi}, \partial_m\vec{\psi})$ で媒介変数表示された多様体から出発する．上のように，群変換 $g_0 = e^{i\vec{\xi}\cdot\vec{X}}$ を応用する．これは，

$$e^{i\vec{\xi}\cdot\vec{X}} \cdot (\vec{\xi}, \vec{\psi}, \partial_m\vec{\xi}, \partial_m\vec{\psi}) \equiv (\vec{0}, \vec{\psi}, \Delta_m\vec{\xi}, \Delta_m\vec{\psi}) \tag{E.33}$$

を与えて，われわれの一般論から，$\Delta_m\vec{\xi}$ と $\Delta_m\vec{\psi}$ が，標準表現として変換する共変微分であることがわかる．

$\Delta_m\vec{\xi}$ を計算するために公式 (E.13) から出発する．

$$g_0 e^{-i\vec{\xi}\cdot\vec{X}} = e^{-i\vec{\xi}'\cdot\vec{X}} e^{-i\vec{u}'\cdot\vec{T}}. \tag{E.34}$$

そして x^m に関して微分する．

$$g_0\partial_m e^{-i\vec{\xi}\cdot\vec{X}} = (\partial_m e^{-i\vec{\xi}'\cdot\vec{X}})e^{-i\vec{u}'\cdot\vec{T}} + e^{-i\vec{\xi}'\cdot\vec{X}}(\partial_m e^{-i\vec{u}'\cdot\vec{T}}). \tag{E.35}$$

前のように，$\vec{\xi}'$ と $\vec{u}'$ は $\vec{\xi}$ を通じて x^m 依存性がある．いま，$g_0 = e^{i\vec{\xi}\cdot\vec{X}}$ と選ぶと，それは $\vec{\xi}'$ と $\vec{u}'$ を点 x^m でゼロに変換する．これが

$$e^{i\vec{\xi}\cdot\vec{X}}\partial_m e^{-i\vec{\xi}\cdot\vec{X}} = \partial_m e^{-i\vec{\xi}'\cdot\vec{X}} + \partial_m e^{-i\vec{u}'\cdot\vec{T}}|_{\vec{\xi}'=\vec{u}'=0}$$

$$= i\,\partial_m \vec{\xi}' \cdot \vec{X} - i\,\partial_m \vec{u}' \cdot \vec{T}|_{\vec{\xi}'=\vec{u}'=0}$$
$$\equiv -i\Delta_m \vec{\xi}\ \ \vec{X} - i\vec{V}_m \cdot \vec{T} \tag{E.36}$$

を与える．式 (E.36) が $\Delta_m\vec{\xi}$ を媒介変数 $\vec{\xi}$ の関数として計算することを可能にする．演習 (3) で $\Delta_m\vec{\xi}$ が標準表現として実際に変換することをみる．

同様な手法が，$\Delta_m\vec{\psi}$ を見つけるのに使える．式 (E.25) を微分することから始める．

$$g_0 \cdot \partial_m \vec{\psi} = \partial_m \tilde{D}(e^{-i\vec{u}'\cdot\vec{T}})\vec{\psi} + \tilde{D}(e^{-i\vec{u}'\ \vec{T}})\partial_m\vec{\psi}. \tag{E.37}$$

上のように，$g_0 = e^{i\vec{\xi}\cdot\vec{X}}$ をとって，

$$e^{i\vec{\xi}\cdot\vec{X}} \cdot \partial_m\vec{\psi} = -i(\partial_m \vec{u}' \cdot \vec{T})\vec{\psi} + \partial_m\vec{\psi}|_{\vec{\xi}'=\vec{u}'=0} \tag{E.38}$$

を発見する．式 (E.38) を式 (E.36) と比較して，

$$\Delta_m\vec{\psi} = \partial_m\vec{\psi} - i(\vec{V}_m \cdot \vec{T})\vec{\psi} \tag{E.39}$$

を発見する．演習 (4) で $\Delta_m\vec{\psi}$ が標準表現として変換することを示す．

文　　献

S. Coleman, J. Wess, and B. Zumino, Phys. Rev. **177**, 2239 (1969).
J. Wess in "Current Algebra and Phenomenological Lagrange Functions," Springer Tracts in Modern Physics **50**, G. Hohler, ed., NewYork, Springer (1969).

演　　習

(1) 式 (E.3) で定義された行列 D が，群 G の表現を形成することを示せ．

(2) $\Delta_m\vec{\psi}$ が，標準表現として変換することを示せ．式 (E.34) と式 (E.35) の間で g_0 を消去することから始めよ．

$$e^{-i\vec{\xi}'\cdot\vec{X}}e^{-i\vec{u}'\cdot\vec{T}}e^{i\vec{\xi}\cdot\vec{X}}(\partial_m e^{-i\vec{\xi}\cdot\vec{X}}) = (\partial_m e^{-i\vec{\xi}'\cdot\vec{X}})e^{-i\vec{u}'\cdot\vec{T}}$$
$$+ e^{-i\vec{\xi}'\cdot\vec{X}}(\partial_m e^{-i\vec{u}'\cdot\vec{T}}).$$

それから，$e^{i\vec{\xi}'\cdot\vec{X}}$ と $e^{i\vec{u}'\cdot\vec{T}}$ を左に掛けて

$$e^{i\vec{\xi}\cdot\vec{X}}\partial_m e^{-i\vec{\xi}\cdot\vec{X}} = e^{i\vec{u}'\cdot\vec{T}}(e^{i\vec{\xi}'\cdot\vec{X}}\partial_m e^{-i\vec{\xi}'\cdot\vec{X}})e^{-i\vec{u}'\cdot\vec{T}} + e^{i\vec{u}'\cdot\vec{T}}\partial_m e^{-i\vec{u}'\cdot\vec{T}}.$$

これは,

$$(\Delta_m\vec{\xi}\cdot\vec{X})' = e^{-i\vec{u}'\cdot\vec{T}}(\Delta_m\vec{\xi}\cdot\vec{X})e^{i\vec{u}'\cdot\vec{T}}$$

と

$$(\vec{V}_m\cdot\vec{T})' = e^{-i\vec{u}'\cdot\vec{T}}(\vec{V}_m\cdot\vec{T})e^{i\vec{u}'\ \vec{T}} + e^{-i\vec{u}'\cdot\vec{T}}\partial_m e^{i\vec{u}'\ \vec{T}}$$

を示す.

付録 F.　非線形表現と不変作用

本付録では，非線形表現の研究を継続する．付録 E で導入した方法を用いて，群 H のもとで不変な作用を，より大きい群 $G \supset H$ のもとで不変な作用に昇格できることを示す．ここで導かれた結果は，第 24 章でゲージ不変な物質結合を超空間で構成するのに使われる．

われわれは，ある場 A^i の関数であるラグランジアン $\mathscr{L}_H$ が存在すると仮定して出発する．ラグランジアンは対称群 H のもとで不変とする．場 A^i は，群 $G \supset H$ のもとでの変換性が十分に定義された，任意の関数である．ラグランジアン $\mathscr{L}_H$ は，しかし，最大の群（full group）G のもとで不変ではない．代わりに，変分 $\delta\mathscr{L}_H \neq 0$ をもつとする．

この付録では，その変分が正確に $\mathscr{L}_H$ の変分を打ち消すような相殺項 $\mathscr{L}_{CT}$ を構築する．われわれは，相殺項を場 A^i と，剰余類 G/H を媒介変数表示する場 $\xi^{(\alpha)}$ をいっしょにして相殺項を構築する．われわれは，$\xi^{(\alpha)} = 0$ のとき $\mathscr{L}_{CT}$ が消えなければならないという条件を挿入する．この方法で，ラグランジアン

$$\mathscr{L}_G = \mathscr{L}_H + \mathscr{L}_{CT} \tag{F.1}$$

は，最大群 G のもとで不変で，$\xi^{(\alpha)} = 0$ のとき $\mathscr{L}_H$ に帰着する．

付録 E でのように，G の変換を二つの組，H での変換とそれ以外での変換に分ける．変換 $u_0 \in H$ のもとでラグランジアン $\mathscr{L}_H$ は不変と仮定する．

$$\delta_H \mathscr{L}_H \equiv -iu_0^{(a)} \hat{T}^{(a)} \mathscr{L}_H = 0. \tag{F.2}$$

ここで，$\hat{T}^{(a)}$ は場 A^i に作用する微分演算子で H の変換を生成する．変換 $v_0 \in G$ のもとで，$\mathscr{L}_H$ は次の形の無限小変分をもつ．

$$\delta_{G/H} \mathscr{L}_H \equiv -iv_0^{(\alpha)} \hat{X}^{(\alpha)} \mathscr{L}_H \equiv -v_0^{(\alpha)} D^{(\alpha)}. \tag{F.3}$$

ここで，演算子 $\hat{X}^{(\alpha)}$ は G の変換を生成するが，それは H の直交補空間 (orthogonal complement) である．われわれは，次のような関数

$$
\begin{aligned}
u_0^{(a)}\hat{T}^{(a)}\mathscr{L}_{CT} &= 0 \\
v_0^{(\alpha)}\hat{X}^{(\alpha)}\mathscr{L}_{CT} &= iv_0^{(\alpha)}D^{(\alpha)}
\end{aligned}
\tag{F.4}
$$

かつ，境界条件

$$
\mathscr{L}_{CT}(A^i, 0) = 0 \tag{F.5}
$$

に従う，$\mathscr{L}_{CT}(A^i, \xi^{(\alpha)})$ を見つける必要があることがわかる．この表現で，演算子 $\hat{T}^{(a)}$ と $\hat{X}^{(\alpha)}$ は相殺項ラグランジアン中の場 A^i と媒介変数 $\xi^{(\alpha)}$ に作用する演算子である．

さて，$\mathscr{L}_{CT}$ を次のように見つけよう．最初に計算するのは

$$
\left(-iv_0^{(\alpha)}\hat{X}^{(\alpha)}\right)^n \mathscr{L}_{CT} = \left(-iv_0^{(\alpha)}\hat{X}^{(\alpha)}\right)^{n-1}\left(v_0^{(\gamma)}D^{(\gamma)}\right). \tag{F.6}
$$

これは指数関数化することができて，

$$
e^{-iv_0^{(\alpha)}\hat{X}^{(\alpha)}}\mathscr{L}_{CT} = \mathscr{L}_{CT} + \frac{e^{-iv_0^{(\alpha)}\hat{X}^{(\alpha)}} - 1}{-iv_0^{(\beta)}\hat{X}^{(\beta)}}\left(v_0^{(\gamma)}D^{(\gamma)}\right). \tag{F.7}
$$

ここで，右辺では，$D^{(\alpha)}$ が場 $\xi^{(\alpha)}$ を含んでいないので微分演算子 $\hat{X}^{(\alpha)}$ は演算子 $\delta^{(\alpha)}A_i(\delta/\delta A_i)$ に帰着する．今や，われわれは，$e^{-iv_0^{(\alpha)}\hat{X}^{(\alpha)}}$ が $\mathscr{L}_{CT}$ を媒介変数 $v_0^{(\alpha)}$ で変換することに留意して，$\mathscr{L}_{CT}$ について解くことができる．付録 E で，媒介変数 $v_0^{(\alpha)} = -\xi^{(\alpha)}$ をもつような変換は $\xi^{(\alpha)}$ をゼロに写像することを示した．したがって，境界条件 (F 5) と関連して，これが意味するのは

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}_{CT} &= \frac{e^{i\xi^{(\alpha)}\hat{X}^{(\alpha)}} - 1}{i\xi^{(\beta)}\hat{X}^{(\beta)}}\xi^{(\gamma)}D^{(\gamma)} \\
&= \int_0^1 d\alpha \exp\left(i\alpha\xi^{(\alpha)}\hat{X}^{(\alpha)}\right)\xi^{(\gamma)}D^{(\gamma)}.
\end{aligned}
\tag{F.8}
$$

ここで，$\hat{X}^{(\alpha)}$ の微分は $\xi^{(\gamma)}$ に作用しない．演習 (2)，(3) に概説される手続きに従って式 (F.8) が式 (F.4) を満たすことを検証するのは有益である．

文　献

S. Samuel, Nucl. Phys. **B245**, 127 (1984).
J Bagger and J Wess, Phys. Lett. **199B**, 243 (1987)

演　習

(1) 式 (F.6)，(F.7) を指数関数化せよ．

(2) $\mathscr{L}_{CT}$ に群の交換子

$$\hat{X}^{(\alpha)} D^{(\beta)} - \hat{X}^{(\beta)} D^{(\alpha)} = i f^{\alpha\beta\gamma} D^{(\gamma)}$$

$$\hat{T}^{(a)} D^{(\beta)} = i f^{a\beta\gamma} D^{(\gamma)}$$

を応用して $D^{(\alpha)}$ に対する条件を導け．

(3) 演習 (2) の関係を用いて，式 (F.8) が式 (F.4) に従うことを示せ．

付録G.　　ゲージ不変な超重力模型

この付録では，とても一般的な，ゲージ不変な超重力模型を，成分場で書き表す．第25章で与えられた超空間ラグランジアンから出発する．

$$\mathscr{L} = \int d^2\Theta\, 2\mathscr{E}\Bigg[\frac{3}{8}(\overline{\mathscr{D}}\,\overline{\mathscr{D}} - 8R)\exp\bigg\{-\frac{1}{3}[K(\Phi,\Phi^+) + \Gamma(\Phi,\Phi^+,V)]\bigg\} + \frac{1}{16g^2}H_{(ab)}(\Phi)W^{(a)}W^{(b)} + P(\Phi)\Bigg] + \text{h.c.} \tag{G.1}$$

次に，第21章～25章までで展開した手法を使い，この成分場で書かれたラグランジアンを拡張する．

$$\begin{aligned}
\mathscr{L} = & -\frac{1}{2}e\mathscr{R} - eg_{ij^*}\tilde{\mathscr{D}}_m A^i \tilde{\mathscr{D}}^m A^{*j} - \frac{1}{2}eg^2 D_{(a)}D^{(a)} \\
& - ieg_{ij^*}\overline{\chi}^j\overline{\sigma}^m\tilde{\mathscr{D}}_m\chi^i + e\varepsilon^{k\ell mn}\overline{\psi}_k\overline{\sigma}_\ell\tilde{\mathscr{D}}_m\psi_n \\
& - \frac{1}{4}eh^R{}_{(ab)}F_{mn}{}^{(a)}F^{mn(b)} + \frac{1}{8}eh^I{}_{(ab)}\varepsilon^{mnk\ell}F_{mn}{}^{(a)}F_{k\ell}{}^{(b)} \\
& - \frac{i}{2}e\Big[\lambda_{(a)}\sigma^m\tilde{\mathscr{D}}_m\overline{\lambda}^{(a)} + \overline{\lambda}_{(a)}\overline{\sigma}^m\tilde{\mathscr{D}}_m\lambda^{(a)}\Big] + \frac{1}{2}h^I{}_{(ab)}\tilde{\mathscr{D}}_m\Big[e\lambda^{(a)}\sigma^m\overline{\lambda}^{(b)}\Big] \\
& + \sqrt{2}\,egg_{ij^*}X^{*j}_{(a)}\chi^i\lambda^{(a)} + \sqrt{2}\,egg_{ij^*}X^i_{(a)}\overline{\chi}^j\overline{\lambda}^{(a)} \\
& - \frac{i}{4}\sqrt{2}\,eg\,\partial_i h_{(ab)}D^{(a)}\chi^i\lambda^{(b)} + \frac{i}{4}\sqrt{2}\,eg\,\partial_{i^*}h^*_{(ab)}D^{(a)}\overline{\chi}^i\overline{\lambda}^{(b)} \\
& - \frac{1}{4}\sqrt{2}\,e\,\partial_i h_{(ab)}\chi^i\sigma^{mn}\lambda^{(a)}F_{mn}{}^{(b)} - \frac{1}{4}\sqrt{2}\,e\,\partial_{i*}h^*_{(ab)}\overline{\chi}^i\overline{\sigma}^{mn}\overline{\lambda}^{(a)}F_{mn}{}^{(b)} \\
& - \frac{1}{2}egD_{(a)}\psi_m\sigma^m\overline{\lambda}^{(a)} + \frac{1}{2}egD_{(a)}\overline{\psi}_m\overline{\sigma}^m\lambda^{(a)} \\
& - \frac{1}{2}\sqrt{2}\,eg_{ij^*}\tilde{\mathscr{D}}_n A^{*j}\chi^i\sigma^m\overline{\sigma}^n\psi_m - \frac{1}{2}\sqrt{2}\,eg_{ij^*}\tilde{\mathscr{D}}_n A^i\overline{\chi}^j\overline{\sigma}^m\sigma^n\overline{\psi}_m \\
& + \frac{i}{4}e\Big[\psi_m\sigma^{ab}\sigma^m\overline{\lambda}_{(a)} + \overline{\psi}_m\overline{\sigma}^{ab}\overline{\sigma}^m\lambda_{(a)}\Big]\Big[F_{ab}{}^{(a)} + \hat{F}_{ab}{}^{(a)}\Big] \\
& + \frac{1}{4}eg_{ij^*}[i\varepsilon^{k\ell mn}\psi_k\sigma_\ell\overline{\psi}_m + \psi_m\sigma^n\overline{\psi}^m]\chi^i\sigma_n\overline{\chi}^j
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- \frac{1}{8} e [g_{ij^*} g_{k\ell^*} - 2R_{ij^*k\ell^*}] \chi^i \chi^k \overline{\chi}^j \overline{\chi}^\ell \\
&+ \frac{1}{16} e \Big[2 g_{ij^*} h^R{}_{(ab)} + h^{R(cd)-1} \partial_i h_{(bc)} \, \partial_{j^*} h^*_{(ad)} \Big] \overline{\chi}^j \overline{\sigma}^m \chi^i \overline{\lambda}^{(a)} \overline{\sigma}_m \lambda^{(b)} \\
&+ \frac{1}{8} e \nabla_i \partial_j h_{(ab)} \chi^i \chi^j \lambda^{(a)} \lambda^{(b)} + \frac{1}{8} e \nabla_{i^*} \partial_{j^*} h^*_{(ab)} \overline{\chi}^i \overline{\chi}^j \overline{\lambda}^{(a)} \overline{\lambda}^{(b)} \\
&+ \frac{1}{16} e h^{R(cd)-1} \partial_i h_{(ac)} \, \partial_j h_{(bd)} \chi^i \lambda^{(a)} \chi^j \lambda^{(b)} \\
&+ \frac{1}{16} e h^{R(cd)-1} \partial_{i^*} h^*_{(ac)} \, \partial_{j^*} h^*_{(bd)} \overline{\chi}^i \overline{\lambda}^{(a)} \overline{\chi}^j \overline{\lambda}^{(b)} \\
&- \frac{1}{16} e g^{ij^*} \partial_i h_{(ab)} \, \partial_{j^*} h^*_{(cd)} \lambda^{(a)} \lambda^{(b)} \overline{\lambda}^{(c)} \overline{\lambda}^{(d)} \\
&- \frac{3}{16} e \lambda_{(a)} \sigma^m \overline{\lambda}^{(a)} \lambda_{(b)} \sigma_m \overline{\lambda}^{(b)} \\
&+ \frac{i}{4} \sqrt{2} \, e \, \partial_i h_{(ab)} \Big[\chi^i \sigma^{mn} \lambda^{(a)} \psi_m \sigma_n \overline{\lambda}^{(b)} + \frac{1}{4} \overline{\psi}_m \overline{\sigma}^m \chi^i \lambda^{(a)} \lambda^{(b)} \Big] \\
&+ \frac{i}{4} \sqrt{2} \, e \, \partial_{i^*} h^*_{(ab)} \Big[\overline{\chi}^i \overline{\sigma}^{mn} \overline{\lambda}^{(a)} \overline{\psi}_m \overline{\sigma}_n \lambda^{(b)} + \frac{1}{4} \psi_m \sigma^m \overline{\chi}^i \overline{\lambda}^{(a)} \overline{\lambda}^{(b)} \Big] \\
&- e \exp(K/2) \Big\{ P^* \psi_a \sigma^{ab} \psi_b + P \overline{\psi}_a \overline{\sigma}^{ab} \overline{\psi}_b \\
&+ \frac{i}{2} \sqrt{2} \, D_i P \chi^i \sigma^a \overline{\psi}_a + \frac{i}{2} \sqrt{2} \, D_{i^*} P^* \overline{\chi}^i \overline{\sigma}^a \psi_a \\
&+ \frac{1}{2} \mathscr{D}_i D_j P \chi^i \chi^j + \frac{1}{2} \mathscr{D}_{i^*} D_{j^*} P^* \overline{\chi}^i \overline{\chi}^j \\
&- \frac{1}{4} g^{ij^*} D_{j^*} P^* \partial_i h_{(ab)} \lambda^{(a)} \lambda^{(b)} - \frac{1}{4} g^{ij^*} D_i P \, \partial_{j^*} h^*_{(ab)} \overline{\lambda}^{(a)} \overline{\lambda}^{(b)} \Big\} \\
&- e \exp(K) [g^{ij^*} (D_i P)(D_j P)^* - 3 P^* P]. \qquad \text{(G.2)}
\end{aligned}
$$

ここで，$h^R{}_{(ab)} = \mathrm{Re}\, H_{(ab)}|$，$h^I{}_{(ab)} = \mathrm{Im}\, H_{(ab)}|$ である．共変微分は次のように与えられる．

$$
\begin{aligned}
\tilde{\mathscr{D}}_m A^i &= \partial_m A^i - g v_m{}^{(a)} X^i_{(a)} \\
\tilde{\mathscr{D}}_m \chi^i &= \partial_m \chi^i + \chi^i \omega_m + \Gamma^i_{jk} \tilde{\mathscr{D}}_m A^j \chi^k - g v_m{}^{(a)} \frac{\partial X^i_{(a)}}{\partial A^j} \chi^j \\
&\quad - \frac{1}{4} (K_j \tilde{\mathscr{D}}_m A^j - K_{j^*} \tilde{\mathscr{D}}_m A^{*j}) \chi^i - \frac{i}{2} g v_m{}^{(a)} \,\mathrm{Im}\, F_{(a)} \chi^i \\
\tilde{\mathscr{D}}_m \lambda^{(a)} &= \partial_m \lambda^{(a)} + \lambda^{(a)} \omega_m - g f^{abc} v_m{}^{(b)} \lambda^{(c)} \\
&\quad + \frac{1}{4} (K_j \tilde{\mathscr{D}}_m A^j - K_{j^*} \tilde{\mathscr{D}}_m A^{*j}) \lambda^{(a)} + \frac{i}{2} g v_m{}^{(b)} \,\mathrm{Im}\, F_{(b)} \lambda^{(a)}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}\tilde{\mathscr{D}}_m\psi_n &= \partial_m\psi_n + \psi_n\omega_m \\ &\quad + \frac{1}{4}(K_j\tilde{\mathscr{D}}_m A^j - K_{j^*}\tilde{\mathscr{D}}_m A^{*j})\psi_n + \frac{i}{2}g v_m{}^{(a)}\,\mathrm{Im}\,F_{(a)}\psi_n \\ D_iP &= P_i + K_iP \\ \mathscr{D}_iD_jP &= P_{ij} + K_{ij}P + K_iD_jP + K_jD_iP - K_iK_jP - \Gamma^k_{ij}D_kP\end{aligned} \tag{G.3}$$

これらの表現では，ベクトル多重項で書かれた場は，$v_m{}^{(a)}$，$\lambda^{(a)}$ のように，上付のゲージ添字をもつものと定義される．キリング・ベクトルとキリング・ポテンシャルは，$X^i_{(a)}$，$D_{(a)}$ のように，下付の添字をもつ．これらの添字は，$h^R{}_{(ab)}$ とその逆関数で，上げ下げされる．これらの慣習を用いて，ラグランジアン (G.2) が，次のような超重力変換のもとで不変であることを確認することができる．

$$\begin{aligned}\delta_\zeta e_m{}^a &= i(\zeta\sigma^a\overline{\psi}_m + \overline{\zeta}\overline{\sigma}^a\psi_m) \\ \delta_\zeta A^i &= \sqrt{2}\,\zeta\chi^i \\ \delta_\zeta\chi^i &= i\sqrt{2}\,\sigma^m\overline{\zeta}\hat{\tilde{\mathscr{D}}}_m A^i - \Gamma^i_{jk}\delta_\zeta A^j\chi^k \\ &\quad + \frac{1}{4}(K_j\delta_\zeta A^j - K_{j^*}\delta_\zeta A^{*j})\chi^j - \sqrt{2}\,e^{K/2}g^{ij^*}D_{j^*}P^*\zeta \\ &\quad + \frac{1}{4}\sqrt{2}\,\zeta g^{ij^*}\,\partial_{j^*}h^*_{(ab)}\overline{\lambda}^{(a)}\overline{\lambda}^{(b)} \\ \delta_\zeta v_m{}^{(a)} &= i\big(\zeta\sigma_m\overline{\lambda}^{(a)} + \overline{\zeta}\overline{\sigma}_m\lambda^{(a)}\big) \\ \delta_\zeta\lambda^{(a)} &= \hat{F}_{ab}{}^{(a)}\sigma^{ab}\zeta - \frac{1}{4}(K_j\delta_\zeta A^j - K_{j^*}\delta_\zeta A^{*j})\lambda^{(a)} - igD^{(a)}\zeta \\ &\quad + \frac{1}{4}\sqrt{2}\,\zeta h^{R(ab)-1}\,\partial_i h_{(bc)}\chi^i\lambda^{(c)} - \frac{1}{4}\sqrt{2}\,\zeta h^{R(ab)-1}\,\partial_{i^*}h^*_{(bc)}\overline{\chi}^i\overline{\lambda}^{(c)} \\ \delta_\zeta\psi_m &= 2\tilde{\mathscr{D}}_m\zeta - \frac{i}{2}\sigma_{mn}\zeta g_{ij^*}\chi^i\sigma^n\overline{\chi}^j + \frac{i}{2}(g_{mn} + \sigma_{mn})\zeta\lambda_{(a)}\sigma^n\overline{\lambda}^{(a)} \\ &\quad - \frac{1}{4}(K_j\delta_\zeta A^j - K_{j^*}\delta_\zeta A^{*j})\psi_m + ie^{K/2}P\sigma_m\overline{\zeta}.\end{aligned} \tag{G.4}$$

ラグランジアン (G.2) は超重力理論の現象論的研究の出発点なのである．

文　献

G. Girardi, R. Grimm, M. Müller, and J. Wess, Z. Phys. **C26**, 427 (1984).
P. Binétruy, G Girardi, and R. Grimm, LAPP-TH-275/90 (1990).

索　　引

欧数字

あ　行

か　行

さ　行

た　行

な・は　行

や・ら　行

訳者の略歴
志摩　一成（しま　かずなり）
1976年東北大学大学院理学研究科修了．理学博士．
1976年埼玉工業大学講師，1987年より埼玉工業大学教授，現在に至る．Karlsruhe University (Alexander von Humboldt Foundation), München University, California University Berkeley などで客員教授，客員研究員を歴任．米国数学会評論委員，各種海外専門雑誌論文査読委員を務める．
日本国内で最初に超対称性の論文（1976）を発表．

超対称性と超重力

平成23年10月31日　発　行

訳　者　　志　摩　一　成

発行者　　吉　田　明　彦

発行所　　丸善出版株式会社
〒101-0051 東京都千代田区神田神保町二丁目17番
編集：電話(03)3512-3267／FAX(03)3512-3272
営業：電話(03)3512-3256／FAX(03)3512-3270
http://pub.maruzen.co.jp/

組版印刷・製本／三美印刷株式会社

ISBN 978-4-621-08446-5 C 3042　　　Printed in Japan